Uitwerkingen voorbeeldtentamen 2 Wiskunde B 2018

Vraag 1a – 4 punten

Voor $x \neq 0$ geldt:

$$f(x) = \frac{-2+2\sqrt{x+1}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{2(-1+\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{2\left(-1^2+\left(\sqrt{x+1}\right)^2\right)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \frac{2(-1+x+1)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{2x}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{2}{1+\sqrt{x+1}} = h(x)$$

Alternatief:

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{-2+2\sqrt{x+1}}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{2(-1+\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{x} = 2$$

Vraag 1b – 4 punten

Voor $x \neq 0$ geldt:

$$g(x) = \frac{4x^2+x}{x} = 4x+1$$

k: $y = 4x+1$ met $x = 0$ geeft $y = 1$, en ook $h(0) = 1$.

De perforatie van zowel f als g is dus het punt (0,1).

$$h'(x) = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{x+1}}}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{x+1}\cdot\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2}$$

De helling van *k* is 4; de helling van h in (0,1) is $h'(0) = -\frac{1}{4}$

Het product van deze hellingen is -1, dus de beide grafieken snijden elkaar loodrecht.

Vraag 2a – 4 punten

$f(p) - g(p) = \ln(4) \Leftrightarrow \ln(9-2p) - \ln(3-p) = \ln(4) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{9-2p}{3-p}\right) = \ln(4)$

$\Leftrightarrow \frac{9-2p}{3-p} = 4 \Leftrightarrow 9-2p = 4(3-p) \Leftrightarrow 9-2p = 12-4p \Leftrightarrow 2p = 3 \Leftrightarrow p = \frac{3}{2}$

$g(p) - f(p) = \ln(4)$ heeft geen oplossingen, zoals j e in de grafiek kunt zien.

Vraag 2b – 7 punten

$f'(x) = -\frac{2}{9-2x}$; $g'(x) = -\frac{1}{3-x}$

$f(0) = \ln(9)$; $f'(0) = -\frac{2}{9}$; $g(0) = \ln(3)$; $g'(0) = -\frac{1}{3}$

De raaklijnen zijn dus $y = -\frac{2}{9}x + \ln(9)$ en $y = -\frac{1}{3}x + \ln(3)$

Op te lossen: $-\frac{2}{9}x + \ln(9) = -\frac{1}{3}x + \ln(3)$

Dit geeft $\frac{1}{9}x = \ln(3) - \ln(9) \Leftrightarrow x = 9(\ln(3) - \ln(9))$

Ofwel $x = 9\ln\left(\frac{3}{9}\right) = 9\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(3^{-9}) = -9\ln(3)$

De tweede, derde en vierde uitdrukking zijn alle drie OK.

Vraag 2c – 5 punten

$f(x) = h(x) \Leftrightarrow \ln(9-2x) = 2\ln(x+3) \Leftrightarrow \ln(9-2x) = \ln((x+3)^2) \Leftrightarrow 9-2x = x^2+6x+9$

Hieruit volgt $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -8$

$x = -8$ voldoet niet; $x = 0$ geeft snijpunt $(0, \ln(9))$

Vraag 2d – 7 punten

$y = \ln(3-x) \Leftrightarrow e^y = 3-x \Leftrightarrow x = 3 - e^y$

Te berekenen is dus $\pi \cdot \int_0^{\ln(3)} (3-e^y)^2 \, dy$

Een primitieve van $(3-e^y)^2 = 9 - 6e^y + e^{2y}$ is $G(y) = 9y - 6e^y + \frac{1}{2}e^{2y}$

De inhoud is zodoende $\pi \cdot \left(9\ln(3) - 6 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 9 - \left(0 - 6 + \frac{1}{2}\right)\right) = \pi(9\ln(3) - 8)$

Vraag 3a – 6 punten

$\angle CBP = 90°$, dus onze vriend Thales zegt dat het middelpunt van de cirkel door *B*, *C* en *P* het midden is van de schuine zijde *PC* van driehoek *BPC*. Dit is het punt $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

De vergelijking van de cirkel heeft dus de vorm $(x+1)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = r^2$

Invullen van de coördinaten van *B* geeft $r^2 = (0+1)^2 + \left(4+\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 20\frac{1}{4} = 21\frac{1}{4}$
Je kunt uiteraard ook de coördinaten van C of P invullen.

Alternatief 1:

De middelloodlijn van *B* en *C* gaat door $(-2{,}0)$ en heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$
Want hij loopt evenwijdig aan de lijn door A en B.

De vergelijking van deze lijn is dus $y = -\frac{1}{2}(x+2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$

De middelloodlijn van *B* en *P* gaat door $\left(1{,}3\frac{1}{2}\right)$ en heeft richtingscoëfficiënt 2
Want hij loopt evenwijdig aan de lijn door B en C.

De vergelijking van deze lijn is dus $y - 3\frac{1}{2} = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x + 1\frac{1}{2}$

Het middelpunt van de cirkel is het snijpunt van deze middelloodlijnen.

Dit vinden we door op te lossen:

$-\frac{1}{2}x - 1 = 2x + 1\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\frac{1}{2}x = 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$, dus $y = -\frac{1}{2}$

Berekening van de vergelijking verder als boven.

Alternatief 2:

Invullen van de coördinaten van $B(0{,}4)$, $C(-4,-4)$ en $P(2{,}3)$ in $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ geeft drie vergelijkingen in drie onbekenden waaruit a, b en r^2 opgelost kunnen worden.

Vraag 3b – 6 punten

De rechte lijn door $P(2{,}3)$ en $D(4,-8)$ heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{11}{2}$.

De vergelijking is dus $y - 3 = -\frac{11}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = -\frac{11}{2}x + 14$

De lijn door *C* en *Q* staat loodrecht hierop en heeft dus richtingscoëfficiënt $\frac{2}{11}$.

De vergelijking van de lijn door $C(-4,-4)$ en *Q* is zodoende $y + 4 = \frac{2}{11}(x+4) \Leftrightarrow y = \frac{2}{11}x - \frac{36}{11}$

Q is het snijpunt van deze twee lijnen, dus los op:

$-\frac{11}{2}x + 14 = \frac{2}{11}x - \frac{36}{11} \Leftrightarrow -121x + 308 = 4x - 72 \Leftrightarrow -125x = -380 \Leftrightarrow x = \frac{76}{25}$

Hieruit volgt $y = -\frac{11}{2}\cdot\frac{76}{25} + 14 = -\frac{836}{50} + \frac{700}{50} = -\frac{136}{50} = -\frac{68}{25}\left(= \frac{2}{11}\cdot\frac{76}{25} - \frac{36}{11} = \frac{152}{275} - \frac{900}{275} = -\frac{748}{275} = -\frac{68}{25}\right)$

Alternatieven:

Thales zegt dat Q op de cirkel uit vraag a ligt, dus bereken het snijpunt van deze cirkel met de lijn door P en D. Er zijn ook diverse uitwerkingen met de vectorvoorstelling van deze lijn mogelijk.

Vraag 3c – 6 punten

De projectie van *P* op zijde *CD* noemen we *S*, de projectie van *Q* op zijde *CD* noemen we *T*.

Merk op dat de driehoeken *PSD* en *QTD* gelijkvormig zijn.

De oppervlakte van driehoek *CQD* is $\frac{1}{2}|CD| \cdot |QT|$

Dit moet gelijk zijn aan $\frac{1}{3} \cdot |CD|^2$

Hieruit volgt $|QT| = \frac{2}{3}|CD|$

Vanwege de genoemde gelijkvormigheid volgt hieruit $|DQ| = \frac{2}{3}|DP|$.

Dit geeft: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{DP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, dus $x_Q = 2\frac{2}{3}$ en $y_Q = -\frac{2}{3}$

Vraag 4a – 5 punten

$f_1'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x$

$f_1''(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^x + 2x \cdot \mathrm{e}^x + 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2$

$f_1''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 + \sqrt{8}}{2} = -2 + \sqrt{2} \vee x = \dfrac{-4 - \sqrt{8}}{2} = -2 - \sqrt{2}$

Vraag 4b – 6 punten

$f_a'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{ax} + x^2 \cdot a\mathrm{e}^{ax}$

$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\dfrac{2}{a}$

In het maximum geldt dus $x = -\frac{2}{a} \Leftrightarrow a = -\frac{2}{x}$

Invullen van $a = -\frac{2}{x}$ in $y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}$ geeft $y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-2}$

Vraag 4c – 7 punten

Als de grafiek van f_2 en de lijn $y = px$ elkaar raken, dan geldt: $f_2(x) = px$ en $f_2'(x) = p$

Dit geeft $x^2\mathrm{e}^{2x} = px$ en $2x\mathrm{e}^{2x} + 2x^2\mathrm{e}^{2x} = p$

Dit combineert tot: $x^2\mathrm{e}^{2x} = (2x\mathrm{e}^{2x} + 2x^2\mathrm{e}^{2x}) \cdot x \Leftrightarrow x^2\mathrm{e}^{2x} = x^2\mathrm{e}^{2x}(2 + 2x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$

$x = 0$ geeft raaklijn $y = 0$ (de *x*-as).

$x = -\frac{1}{2}$ geeft $p = -\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$, dus de raaklijn is $y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \cdot x$

Vraag 5a – 4 punten

Op een verticale lijn zijn de *x*-coördinaten gelijk, dus moet gelden: $x(\pi - a) = x(a)$, en dat klopt:

$x(\pi - a) = \cos(\pi - a)\sin(2\pi - 2a) = -\cos(a)\sin(-2a) = -\cos(a) \cdot -\sin(2a) = \cos(a)\sin(2a) = x(a)$

Vraag 5b – 5 punten

$d(P_t, x - as) = |y(t)|$; $d(P_t, y - as) = |x(t)|$. Er moet dus gelden $|y(t)| = 2|x(t)|$.

Dit geeft: $|\cos(t)| = |2\cos(t)\sin(2t)| \Leftrightarrow |2\sin(2t)| = 1$

De punten waar $\cos(t) = 0$ *laten we immers buiten beschouwing.*

$2\sin(2t) = 1 \Leftrightarrow \sin(2t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee t = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

$2\sin(2t) = -1$

$\Leftrightarrow \sin(2t) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2t = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee t = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

Vierde tijdstip: $t = -\frac{1}{12}\pi + \pi = \frac{11}{12}\pi$

Eerste tijdstip $\frac{1}{12}\pi$*; tweede tijdstip* $\frac{5}{12}\pi$*; derde tijdstip* $-\frac{5}{12}\pi + \pi = \frac{7}{12}\pi$

Vraag 5c – 5 punten

$$\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} x\left(\frac{3}{4}\pi\right) \\ y\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \\ \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$x'(t) = -\sin(t) \cdot \sin(2t) + \cos(t) \cdot 2\cos(2t)$, dus $x'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -1 + 0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$y'(t) = -\sin(t)$, dus $y'\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Zo zien we $\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP_t}$

Vraag 6a – 5 punten

$$g_p(x) = \frac{x^2-5x+6}{2x-p} \Rightarrow g_p'(x) = \frac{(2x-5)(2x-p)-(x^2-5x+6)\cdot 2}{(2x-p)^2} \Rightarrow g_p'(2) = \frac{-(4-p)-0}{(4-p)^2} = \frac{1}{p-4}$$

De helling van $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ in (2,0) is $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2 = 1$

Er moet dus gelden $\frac{1}{p-4} = 1 \Leftrightarrow p-4 = 1 \Leftrightarrow p = 5$

Vraag 6b – 5 punten

$$g_8(x) = \frac{x^2-5x+6}{2x-8}$$

$2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$; voor $x=4$ is de teller niet nul, dus verticale asymptoot $x=4$.

$$\frac{x^2-5x+6}{2x-8} = \frac{x^2-4x-x+6}{2x-8} = \frac{x^2-4x}{2x-8} + \frac{-x+4}{2x-8} + \frac{2}{2x-8} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{2x-8}$$

De scheve asymptoot is dus $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Extra vraag:

Voor $x \neq 2$ geldt $g_4(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(2x-4)} = \frac{1}{2}(x-3)$.

De grafiek is dus de lijn $y = \frac{1}{2}(x-3)$ met perforatie in $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$.

Voor $x \neq 3$ geldt $g_6(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(2x-6)} = \frac{1}{2}(x-2)$.

De grafiek is dus de lijn $y = \frac{1}{2}(x-2)$ met perforatie in $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

Extra vraag 1a – 6 punten

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{9-2x}} \cdot -2 = -\dfrac{1}{\sqrt{9-2x}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{3}$

$f(0) = 3$, een vergelijking van de raaklijn is dus $y = -\frac{1}{3}x + 3$

Snijpunt met *x*-as: $x = 9$

Oppervlakte driehoek: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = 13\frac{1}{2}$

Extra vraag 1b – 6 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 9 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4\frac{1}{2}$; te berekenen is dus $\int_0^{4,5} f(x)\ \mathrm{d}x$

De primitieve heeft de vorm $F(x) = a(9-2x)^{\frac{3}{2}}$ met $a = \frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{1}{3}$

$F(0) = -\frac{1}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} = -9$; $F\left(4\frac{1}{2}\right) = 0$; de oppervlakte is dus $0 - (-9) = 9$

Extra vraag 1c – 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{9-2x} = 2x + 11 \Rightarrow 9 - 2x = (2x+11)^2 \Leftrightarrow 9 - 2x = 4x^2 + 44x + 121$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 46x + 112 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-46 + \sqrt{324}}{8} = \frac{-46 + 18}{8} = -3\frac{1}{2} \vee x = \frac{-46 - 18}{8} = -8$$

Alleen $x = -3\frac{1}{2}$ voldoet

Extra vraag 2a – 7 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(2x - \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$

De vergelijking kan ook omgezet worden naar $\sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right)$

Dit geeft $2x = -2x + \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 4x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

Oplossingen op het interval $[-\pi, \pi]$: $x = \frac{1}{6}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi$; $x = -\frac{1}{3}\pi$; $x = -\frac{5}{6}\pi$

Extra vraag 2b – 7 punten

$f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x)$ direct differentiëren geeft

$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(2x) = \sin(2x) - 2\sin(2x) = -\sin(2x)$

of $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) - 2 \cdot 2\sin(x)\cos(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

Je kunt $f(x)$ ook eerst omzetten:

$f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x)$ *geeft ook* $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

In alle gevallen volgt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

Maxima voor $x = 0$ $(+\,k \cdot \pi)$: $f(0) = 1$

Minima voor $x = \frac{1}{2}\pi$ $(+\,k \cdot \pi)$: $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$

Extra vraag 2c – 4 punten

Enerzijds geldt:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) + 2\cos^2(x) - 2 = \sin^2(x) + \cos(2x) + \sin^2(x) + \sin\left(2x - \tfrac{1}{6}\pi\right) + 2\cos^2(x) - 2 \\ &= \cos(2x) + \sin\left(2x - \tfrac{1}{6}\pi\right) + 2(\sin^2(x) + \cos^2(x)) - 2 = \cos(2x) + \sin\left(2x - \tfrac{1}{6}\pi\right) \\ &= \cos(2x) + \sin(2x)\cos(\tfrac{1}{6}\pi) - \cos(2x)\sin\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(2x) \end{aligned}$$

Anderzijds geldt: $\sin\left(2x + \frac{1}{6}\pi\right) = \sin(2x)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + \cos(2x) \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$

Extra vraag 2d – 4 punten

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x + \tfrac{1}{6}\pi\right)\, \mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{2}\cos\left(2x + \tfrac{1}{6}\pi\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\tfrac{1}{2}\cos\left(1\tfrac{1}{6}\pi\right) + \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{1}{6}\pi\right) = -\tfrac{1}{2} \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$