Uitwerkingen voorbeeldtentamen 1 Wiskunde B 2018

Vraag 1a – 4 punten

$x(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

$t = -1$ geeft $y(t) = 0$; $t = 1$ geeft $y(t) = (1+1)^2 = 4$ dus in punt *A* geldt $t = 1$

$x'(t) = -2t$; $y'(t) = 2(t+1)$, dus $x'(1) = -2$ en $y'(1) = 4$

Dit geeft $v = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

Vraag 1b – 4 punten

$$\big(x(t) + y(t)\big)^2 = (1 - t^2 + (1+t)^2)^2 = (1 - t^2 + 1 + 2t + t^2)^2$$
$$= (2 + 2t)^2 = \big(2(1+t)\big)^2 = 2^2 \cdot (1+t)^2 = 4y(t)$$

Vraag 1c – 4 punten

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dit is de normaalvector van lijn ℓ

De vergelijking heeft dus de vorm $-2x + 4y = c$.

Invullen van $x_A = 0$ en $y_A = 4$ geeft $c = 16$, dus de vergelijking is $-2x + 4y = 16 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$

Alternatief:

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{4}{-2} = -2$

Voor de richtingscoëfficiënt a van lijn ℓ geldt dus $-2 \cdot a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

De lijn door $A(0,4)$ met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$ heeft vergelijking $y = \frac{1}{2}x + 4$

Vraag 1c is 6 punten waard als de coördinaten van A en $x'(1)$ en $y'(1)$ niet bij vraag 1a gevonden zijn.

Vraag 2a – 3 punten

$F'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + (x+1) \cdot -\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} - x \cdot \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = -x \cdot \mathrm{e}^{-x} = f_0(x)$

Vraag 2b – 6 punten

$$\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x} + f_0(x)\mathrm{d}x$$

$$= [-\mathrm{e}^{-x} + (1+x)\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = [x\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = \mathrm{e}^{-1} - 0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Vraag 2c – 5 punten

$$\int_0^1 f_p(x) - f_{-p}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (p-x)\mathrm{e}^{-x} - (-p-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 2p\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$= [-2p\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = -2p\mathrm{e}^{-1} + 2p = 2p(1-\mathrm{e}^{-1})$$

$2p(1-\mathrm{e}^{-1}) = 2 \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

Vraag 2d – 6 punten

$f_p'(x) = -1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + (p-x) \cdot -\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x} - p\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$

$f_p''(x) = \mathrm{e}^{-x} + p\mathrm{e}^{-x} + 1 \cdot \mathrm{e}^{-x} + x \cdot -\mathrm{e}^{-x} = (2+p-x)\mathrm{e}^{-x}$

$f_p''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + p - x = 0 \Leftrightarrow p = x - 2$

Dit geeft $y = f_{x-2}(x) = \big((x-2) - x\big) \cdot \mathrm{e}^{-x} = -2\mathrm{e}^{-x}$

Vraag 3a – 6 punten

De vergelijking van cirkel *c* is $(x-14)^2+(y-8)^2=10^2$

$y=0$ invullen geeft $(x-14)^2+8^2=10^2 \Leftrightarrow x^2-28x+196+64=100 \Leftrightarrow x^2-28x+160=0$

Hieruit volgt $(x-8)(x-20)=0$ dus $x_A=8$ en $x_B=20$

De vergelijking mag uiteraard ook met de abc-formule worden opgelost.
De coördinaten van A en B kunnen ook gevonden worden met de stelling van Pythagoras in de driehoeken APC en BPC, waarin $P(14{,}0)$ de projectie van M op de x-as is.

De straal van c^* noemen we *r*; $P(14{,}0)$ is de projectie van *M* op de *x*-as.

Het middelpunt *Q* van cirkel c^* ligt op de middelloodlijn van *A* en *B*, dat is de lijn $x=14$.

Uit $|MQ|=r$ volgt $|PQ|=8-r$.

De stelling van Pythagoras in driehoek APQ geeft: $|AP|^2+|PQ|^2=|AQ|^2$

Hieruit volgt: $(14-8)^2+(8-r)^2=r^2 \Leftrightarrow 36+64-16r+r^2=r^2 \Leftrightarrow 16r=100 \Leftrightarrow r=6{,}25$

Alternatief 1:

Berekening van de coördinaten van *A* en *B* als hierboven.

De middelloodlijn van $A(8{,}0)$ en $B(20{,}0)$ is de verticale lijn $x=14$

De rechte lijn door $A(8{,}0)$ en $M(14{,}8)$ heeft richtingscoëfficiënt $\frac{4}{3}$

De middelloodlijn van *A* en *M* is dus de lijn door $(11{,}4)$ met richtingscoëfficiënt $-\frac{3}{4}$

De vergelijking van deze lijn is $y-4=-\frac{3}{4}(x-11) \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+12\frac{1}{4}$

Q, het middelpunt van c^* is het snijpunt van deze loodlijnen.

$y_Q=-\frac{3}{4}x_Q+12\frac{1}{4} \wedge x_Q=14$ geeft $y_Q=1\frac{3}{4}$

$r=|MQ|=8-1\frac{3}{4}=6\frac{1}{4}$

Alternatief 2:

Berekening van de coördinaten van *A* en *B* als hierboven.
Invullen van de coördinaten van $A(8{,}0)$, $B(20{,}0)$ en $M(14{,}8)$ in $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ geeft drie vergelijkingen in drie onbekenden waaruit *r* opgelost kan worden.

Vraag 3b – 4 punten

De straal van *d* noemen we *r*; $P(14{,}0)$ is de projectie van *M* op de *x*-as.

Dan volgt $NP=14-r$; $PM=8$ en $NM=r+10$

De stelling van Pythagoras geeft vervolgens

$(14-r)^2+8^2=(r+10)^2 \Leftrightarrow 196-28r+r^2+64=r^2+20r+100 \Leftrightarrow 48r=160 \Leftrightarrow r=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$

Vraag 4a – 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3\ln(x) = \ln^3(x) \Leftrightarrow 3\ln(x) - \ln^3(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x)\,(3 - \ln^2(x)) = 0$

Dit geeft $\ln(x) = 0 \vee \ln^2(x) = 3$

$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = f(1) = 0$, dus *B* is het punt (1,0)

$\ln^2(x) = 3 \Leftrightarrow \ln(x) = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\sqrt{3}} \vee x = \mathrm{e}^{-\sqrt{3}}$

$x = \mathrm{e}^{-\sqrt{3}}$ geeft $y = -3\sqrt{3}$ dus *A* is het punt $\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}, -3\sqrt{3}\right)$

$x = \mathrm{e}^{\sqrt{3}}$ geeft $y = 3\sqrt{3}$ dus *C* is het punt $\left(\mathrm{e}^{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}\right)$

Vraag 4b – 6 punten

In de grafiek kun je zien dat de afstand tussen deze punten op dit interval gegeven wordt door $A(p) = f(p) - g(p) = 3\ln(p) - (\ln(p))^3$ *en dat deze functie inderdaad een maximum heeft.*

$A'(p) = \frac{3}{p} - \frac{3}{p}(\ln(p))^2$

$A'(p) = 0 \Leftrightarrow (\ln(p))^2 = 1$

Dit geeft $\ln(p) = 1 \Leftrightarrow p = \mathrm{e}$

De oplossing $\ln(p) = -1 \Leftrightarrow p = \mathrm{e}^{-1}$ *ligt niet in het interval.*

De maximale afstand is dus $A(\mathrm{e}) = 3 - 1 = 2$

Vraag 4c – 6 punten

$y = f(x) = 3\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{3}y \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}y}$

Dit geeft $\pi \cdot \int_0^1 x^2 \mathrm{d}y = \pi \cdot \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}y}\right)^2 \mathrm{d}y = \pi \cdot \int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{2}{3}y} \mathrm{d}y = \pi \cdot \left[\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}y}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} - 1\right)$

Vraag 5a – 4 punten

In de perforatie zijn zowel de teller als de noemer van $f(x)$ gelijk aan 0

$(x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (De discriminant van de andere factor is negatief!)

Voor $x=1$ is x^2-1 ook gelijk aan 0.

Omdat $x^2-1=(x-1)(x+1)$ is $f(x)$ voor $x \neq 1$ gelijk aan $\frac{x^2+x+1}{x+1}$

Dit geeft $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$

De coördinaten van de perforatie zijn dus $x=1$ en $y=\frac{3}{2}$

Vraag 5b – 2 punten

Verticale asymptoot: $x=-1$

want voor $x=-1$ is de noemer 0 en de teller 1

Vraag 5c – 4 punten

Voor $x \neq 1$ geldt $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$

Vraag 5c is 1 punt meer waard als deze vereenvoudiging wel hier, maar niet bij 5a gevonden is.

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x^2+x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1}$$

dus $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

De scheve asymptoot is zodoende $y=x$

Alternatief:

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-1} = \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-1} = x + \frac{x-1}{x^2-1} = x + \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

dus $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0-0}{1-0} = 0$

De scheve asymptoot is zodoende $y=x$

Vraag 5d – 5 punten

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+3x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

Zonder vereenvoudiging is het vinden van $f'(x)$ en het oplossen van $f'(x)=0$ veel lastiger. Vraag 5d is een punt meer waard als deze vereenvoudiging wel hier, maar niet in 5a of 5c gevonden is.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

Voor $x=0$ heeft f een minimum.

De coördinaten van de top waar f een maximum heeft zijn dus $x=-2$ en $y=f(-2)=-3$

Vraag 6a – 4 punten

Voor de verticale asymptoten geldt $\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = 0$

Dit geeft $2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

In de figuur zien we $x = -\frac{1}{6}\pi;\ x = \frac{1}{3}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$

Vraag 6b – 6 punten

$f'(x) = -\frac{1}{\left(\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)\right)^2} \cdot 2\cos\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = 0$

Dit geeft $2x - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$ geeft $f(x) = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\pi} = 1$ en $g(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = 1$

$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$ geeft $f(x) = \frac{1}{\sin -\frac{1}{2}\pi} = -1$ en $g(x) = \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)}{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = -1$

Alternatief:

f heeft een minimum als $\frac{1}{f(x)}$ een maximum heeft en een maximum als $\frac{1}{f(x)}$ een minimum heeft.

f heeft dus een minimum als $\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = 1$

Dit is als $2x - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$

en *f* heeft dus een maximum als $\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = -1$

Dit is als $2x - \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$

In de minima geldt $f(x) = \frac{1}{1} = 1$ en $g(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)} = 1$

en in de maxima geldt $f(x) = \frac{1}{-1} = -1$ en $g(x) = \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)}{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = -1$

Vraag 6c – 5 punten

$f(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)} = 4\cos\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) \Leftrightarrow 4\sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right) = 1$

$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$ geeft dan $\sin\left(4x - \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

Dit geeft $4x - \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $4x - \frac{4}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$4x - \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 4x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$4x - \frac{4}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 4x = \frac{13}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{13}{24}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

Extra opgave, vraag a – 4 punten

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow x - 3 + \frac{4}{x+2} = 7 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) + 4 = 7(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 + 4 = 7x + 14 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{128}}{2} \quad \left(= 4 \pm 4\sqrt{2}\right)$$

Extra opgave, vraag b – 5 punten

Met discriminant:

$$f(x) = p \Leftrightarrow x - 3 + \frac{4}{x+2} = p \Leftrightarrow (x-3)(x+2) + 4 = p(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 + 4 = px + 2p \Leftrightarrow x^2 + (-1-p)x + (-2-2p) = 0$$

Er zijn geen gemeenschappelijke punten als de discriminant van deze vergelijking negatief is

$D = (-1-p)^2 - 4(-2-2p) = 1 + 2p + p^2 + 8 + 8p = p^2 + 10p + 9$

$D = 0 \Leftrightarrow p = -1 \vee p = -9;\ D < 0 \Leftrightarrow -9 < p < -1$

Want de grafiek van $D(p) = p^2 + 10p + 9$ *is een dalparabool.*

Met afgeleide:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(x+2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$$

$f(0) = -1;\ f(-4) = -9$

In de figuur zien we dar er geen gemeenschappelijke punten zijn als $-9 < p < -1$

Extra opgave, vraag c – 6 punten

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = -3 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x+2)^2} = -3 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x+2)^2} = -4 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$$

ℓ is de raaklijn voor $x = -1$, dus is *m* de raaklijn voor $x = -3$.

$f(-3) = -10$, dus raaklijn *m* heeft vergelijking $y + 10 = -3(x+3)$

Of:

$y = ax + b$ *met* $y = -10$, $a = -3$ *en* $x = -3$ *geeft* $-10 = 9 + b \Leftrightarrow b = -19$, *dus* $y = -3x - 19$

Extra opgave, vraag d – 7 punten

$$\int_{-1}^{2} -f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} -x + 3 - \frac{4}{x+2}\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 4\ln(x+2)\right]_{-1}^{2}$$

$$= -2 + 6 - 4\ln(4) + \tfrac{1}{2} + 3 + 0 = 7\tfrac{1}{2} - 4\ln(4)$$

Extra vraag bij opgave 1

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op lijn ℓ

De richtingsvector van lijn ℓ is dus $\begin{pmatrix} 4 \\ -(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Omdat lijn ℓ door punt $A(0,4)$ gaat, geeft dit de vectorvoorstelling $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Extra vraag bij opgave 6

$$g'(x) = \frac{-\cos\left(\frac{5}{6}\pi - x\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{6}\pi - x\right) - \sin\left(\frac{5}{6}\pi - x\right) \cdot \left(-\left(-\sin\left(\frac{5}{6}\pi - x\right)\right)\right)}{\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi - x\right)\right)^2} = -\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi - x\right)\right)^2}$$

$$g'\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right)^2} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = -\tfrac{4}{3}$$

$$g\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)}{\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

De raaklijn vinden we met $y - \frac{1}{3}\sqrt{3} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right)$

of door $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $x = \frac{2}{3}\pi$ en $a = -\frac{4}{3}$ in te vullen in $y = ax + b$

Dit geeft $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{9}\pi - \frac{1}{3}\sqrt{3}$