CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Voorbeeldtentamen Wiskunde A

Datum: Najaar 2018
Tijd: 3 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:						
Opgave	1	2	3	4	5	6
a	4	2	4	3	5	3
b	4	3	5	4	5	6
c	4	6	2	3	3	
c	4		4		4	
e	4		4		4	
Totaal	20	11	19	10	21	9
$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$ U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.						

Opgave 1 – Algebraïsche berekeningen

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A april 2018 (aangepast)

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening.*
De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.

Los onderstaande vergelijkingen algebraïsch op en geef als er een wortel of een logaritme in uw antwoord staat, een benadering van uw antwoord afgerond op drie cijfers achter de decimale komma.

4pt a $3x^2 - 7x + 2 = 0$

4pt b $2x^4 - 4x^8 = 0$

4pt c $2 \cdot 4^x - 4 \cdot 8^x = 0$

4pt d $2 \cdot 5^x - 30 = 0$

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \sqrt{4x - 7}$
P en *Q* zijn de snijpunten van de grafiek van f en de lijn $y = \frac{1}{2}x + 1$.

4pt e Bereken algebraïsch de coördinaten van de punten *P* en *Q*.

Zie ook de extra vraag op de laatste bladzijde.

Opgave 2 – Het maximale rendement

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A april 2018 (aangepast)

Bakker Bert heeft een recept ontwikkeld voor bananentaart. Aangezien hij zelf geen geld heeft, zoekt hij een investeerder om de productie van deze bananentaarten te financieren. Om deze investeerder binnen te halen, vraagt Bert aan zijn vriend Registeraccountant Rob om een model te maken waarmee hij de mogelijke winst van de investeerder kan berekenen.

Rob komt met het volgende model:

- De vaste kosten voor het produceren van de bananentaarten zijn 250 euro.
- De variabele kosten per geproduceerde taart zijn 2 euro.
- Als de verkoopprijs wordt vastgesteld met de formule $p(q) = 14{,}00 - 0{,}05q$ (met $p(q)$ in euro's en q het aantal geproduceerde taarten) dan worden alle geproduceerde taarten verkocht.

Bert gebruikt inderdaad de formule $p(q) = 14{,}00 - 0{,}05q$ om de verkoopprijs van de taarten vast te stellen en hij wil weten bij welk aantal geproduceerde taarten de winst maximaal is. Rob rekent hem voor dat de winst in euro's gegeven wordt door de formule

$$w(q) = -0{,}05q^2 + 12q - 250$$

2pt **a** Gebruik het verband $winst = opbrengst - totale\ kosten$ om aan te tonen dat de hierboven gegeven formule voor de winst correct is.

3pt **b** Bereken met behulp van de afgeleide functie bij welk aantal geproduceerde taarten de winst maximaal is.

Voor de investeerder is niet alleen de winst, maar ook het rendement op zijn investering van belang. Dit wordt gegeven door de formule

$$Rendement = \frac{winst}{investering} \times 100\%$$

Het rendement (in %) voor de investeerder in de bananentaarten van Bakker Bert als functie van het aantal geproduceerde taarten *q* wordt zodoende gegeven door

$$R(q) = \frac{-5q^2 + 1200q - 25\,000}{250 + 2q}$$

6pt **c** Bereken algebraïsch bij welk aantal geproduceerde taarten het rendement van de investeerder maximaal is.

Opgave 3 – Perenteler Paul

Bron: CCVW voortentamen wiskunde A april 2018 (aangepast)

Perenteler Paul is zeer trots op zijn oogst dit jaar. Zijn Conference peren zijn lekkerder en zwaarder dan ooit. Omdat over smaak niet te twisten valt, kijken we in deze opgave alleen naar het gewicht van deze peren. Dit is normaal verdeeld met een gemiddelde van 190 gram met een standaardafwijking van 7 gram.

Bij een keuring worden 10 peren willekeurig gekozen uit de oogst van Paul.

4pt a Bereken de kans dat deze 10 peren alle meer dan 190 gram wegen.

De peren worden verpakt in kistjes van 36 stuks. Het lege gewicht van deze kistjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van 500 gram en een standardafwijking van 20 gram.

5pt b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een kistje met 36 peren.

Een controleur merkt op dat veel van de peren die in vraag 3a gekeurd zijn, aangevreten zijn door insecten. Paul denkt dat dat wel meevalt en hij beweert dat 5% van zijn peren aangevreten is. De controleur meent daarentegen dat meer dan 5% van de peren van Paul aangevreten is.

De controleur en Paul besluiten dit meningsverschil te onderwerpen aan een toetsingsprocedure. Daartoe nemen ze een steekproef van 100 aselect gekozen peren uit de oogst van Paul en tellen het aantal aangevreten peren in deze steekproef. Ze spreken daarbij een significantieniveau af van $\alpha = 0{,}05$.

2pt c Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

Het resultaat van de steekproef is dat 8 van de 100 peren aangevreten zijn door insecten.

4pt d Bereken de kans dat als Paul gelijk heeft, er precies 8 aangevreten peren in de steekproef zitten.

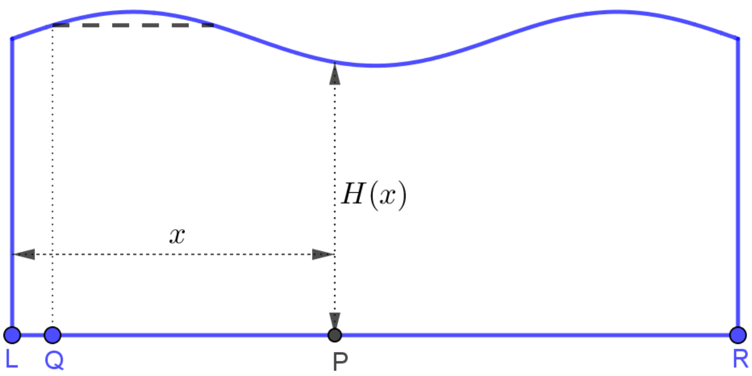
4pt e Kunt u op grond van uw antwoord op vraag 3d een uitspraak doen in deze toetsingsprocedure? Zo ja, formuleer en motiveer dan deze uitspraak zo nauwkeurig mogelijk. Zo nee, welke kans zou u dan wel berekenen om een uitspraak te kunnen doen?

Zie ook de extra vragen op de laatste bladzijde.

Opgave 4 – Een golvend dak

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A april 2018

In de figuur hieronder ziet u een dwarsdoorsnede van een sporthal met een golvend dak. Het laagste punt van dit dak bevindt zich op 10 m boven de vloer, het hoogste punt bevindt zich op 12 m boven de vloer. De breedte van de sporthal (dat is de afstand *LR*) is 27 meter.



De hoogte van het dak boven een zeker punt *P* op de vloer is een functie van de afstand x van dat punt tot punt *L*. Bij deze functie past een formule van de vorm

$$H(x) = A + B\sin(Cx)$$

met H en x in meters.

3pt **a** Laat zien dat de hoogte van het dak boven punt *L* gelijk is aan *A* en bereken deze hoogte, dat wil zeggen: de waarde van *A*.

Gegeven wordt verder dat de hoogte van het dak boven punt *R* ook gelijk is aan *A*.

4pt **b** Bereken nu waarden van *B* en *C* die bij bovenstaande beschrijving passen.

Punt *Q* ligt op de vloer tussen punt *L* en punt *R* op 1,5 meter van punt *L*.
Recht boven punt *Q* is een kabel aan het dak bevestigd, die horizontaal in het vlak van de doorsnede loopt. Het andere eind van deze kabel is ook aan het dak bevestigd, zie de gestreepte lijn in de figuur hierboven.

3pt **c** Bereken algebraïsch de lengte van deze kabel.

Opgave 5 – Twee groeimodellen

Nieuw

De firma Fooglebook heeft een nieuwe app ontwikkeld. Fooglebook heeft modellen laten maken voor het aantal gebruikers van deze app en voor de inkomsten die de firma daarbij genereert. Het eerste model gaat uit van 5000 gebruikers bij de introductie en een groei van het aantal gebruikers met 10% per maand.

5pt **a** Bereken de tijd waarin het aantal gebruikers volgens dit model verdubbelt.

De inkomsten die het gebruik van deze app volgens dit model per maand genereert worden gegeven door de formule $I(n) = 10\,000 + 400n$.
In deze formule geeft $I(n)$ de inkomsten in euro's in maand n met $n = 1$ in de maand waarin de app geïntroduceerd wordt.

5pt **b** Bereken, zonder de inkomsten voor iedere maand afzonderlijk uit te rekenen, de totale inkomsten die deze app volgens dit model in de eerste twee jaar na de introductie genereert. (1 jaar = 12 maanden).

Volgens dit eerste model zal het aantal gebruikers steeds sneller toenemen en bovendien zal het op den duur boven iedere grens uitstijgen. Omdat dit niet realistisch is, wordt een ander model ontwikkeld waarin het aantal gebruikers eerst stijgt, maar daarna afvlakt tot een grenswaarde. Het aantal gebruikers wordt volgens dit tweede model gegeven door de formule $A(t) = 5000 \cdot (100 - 99 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t})$.
In deze formule is $A(t)$ het aantal gebruikers en t de tijd in maanden met $t = 0$ op het moment dat de app geïntroduceerd wordt.

3pt **c** Bereken de grenswaarde van het aantal gebruikers volgens het tweede model.

4pt **d** Bereken de groeisnelheid van het aantal gebruikers volgens het tweede model op $t = 12$. (groeisnelheid = afgeleide groeifunctie).

De formule $A = 5000 \cdot (100 - 99 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t})$ kan worden omgezet naar een formule waarmee je het tijdstip kun berekenen als het aantal gebruikers bekend is.

4pt **e** Bereken deze formule en bepaal met behulp van deze formule het tijdstip waarop de app volgens het tweede model 495 000 gebruikers heeft.

Opgave 6 – Drie dobbelstenen

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A april 2018

Jeroen staat op de vrijmarkt met het volgende spel:

- een speler betaalt een inzet aan Jeroen en werpt vervolgens met drie dobbelstenen
- als de speler drie vijven gooit betaalt Jeroen 50 euro aan de speler
- bij twee vijven betaalt Jeroen 8 euro aan de speler
- bij één vijf betaalt Jeroen 2 euro aan de speler
- als er geen enkele vijf gegooid wordt is de speler zijn inzet kwijt.

3pt **a** Laat zien dat de kans dat de speler 8 euro uitbetaald krijgt, gelijk is aan $\frac{15}{216}$.

6pt **b** Maak een kansverdeling van de uitbetaling per spel en bereken hoe groot de inzet van de speler minimaal moet zijn om te bereiken dat Jeroen naar verwachting winst zal maken met dit spel.

Einde van het tentamen.

Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	Functie	Afgeleide
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	Voorwaarden
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \frac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \frac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$

Meer oefenopgaven

Van het Centraal Examen vwo Wiskunde A 2018, tijdvak 1 is het rekenwerk bij veel vragen vergelijkbaar met het voortentamen wiskunde A van de CCVX:

Voor de vragen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19 geldt dat iets soortgelijks zou gevraagd kunnen worden, maar wel met minder begeleidende tekst; het berekenen van de afgeleide bij vraag 6 valt overigens ook binnen het programma van het voortentamen wiskunde A.

Vragen 5, 13, 16, 20 zijn lastig/onmogelijk zonder grafische rekenmachine en zullen dus niet op die manier gesteld worden, vragen als 8 en 21 worden sowieso niet gesteld.

Je kunt dit examen vinden op www.examenblad.nl .

Extra vraag bij opgave 1

4pt f Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van $f(x) = \sqrt{4x-7}$ in het punt $(2, 1)$.

Extra vragen bij opgave 3

De controleur vraagt zich ook af of het gemiddelde gewicht van de peren van Paul wel 190 gram is. Om dit te toetsen bepaalt hij het gemiddelde gewicht van 25 willekeurig gekozen peren. Hij neemt daarbij aan dat de standaardafwijking wel correct is (deze was 7 gram) en hij neemt een significantieniveau van $\alpha = 0{,}05$.

2pt f Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

Het gemiddelde gewicht van de peren in de steekproef blijkt 187,5 gram te zijn.

5pt g Wat is de uitkomst van de toetsingsprocedure bij dit steekproefresultaat?