CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Uitwerkingen tentamen Wiskunde B 16 januari 2015

Vraag 1a

$f(x) = 3 \cdot (2x-3)^{-1} \;\Rightarrow\; f'(x) = 3 \cdot -(2x-3)^{-2} \cdot 2 = \dfrac{-6}{(2x-3)^2}$

Dit geeft $f'(2) = \frac{-6}{1^2} = -6$.

$y = ax + b$ met $y = 3$, $a = -6$ en $x = 2$ geeft $3 = -6 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 3 + 12 = 15$.

De vergelijking van de raaklijn in (2,3) is dus $y = -6x + 15$.

$y = 0$ geeft $-6x + 15 = 0 \Leftrightarrow 6x = 15 \Leftrightarrow x = 2\frac{1}{2}$. Dit geeft $OP = 2\frac{1}{2}$.

$x = 0$ geeft $y = 15$. Dit geeft $OQ = 15$.

De oppervlakte van driehoek *OPQ* is zodoende $\frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 15 = 18\frac{3}{4}$

Vraag 1b

$$Oppervlakte(V_q) = \int_2^q f(x)\,dx = \left[\tfrac{3}{2}\ln(2x-3)\right]_2^q = \tfrac{3}{2}\ln(2q-3) - \tfrac{3}{2} \cdot 0 = \tfrac{3}{2}\ln(2q-3)$$

Deze oppervlakte moet gelijk zijn aan 3, dus volgt:

$\frac{3}{2}\ln(2q-3) = 3 \Leftrightarrow \ln(2q-3) = 2 \Leftrightarrow 2q - 3 = \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow q = \dfrac{3 + \mathrm{e}^2}{2}$

Vraag 1c

Deze raaklijn heeft een formule van de vorm $y = ax$.

Deze lijn gaat door $O(0,0)$ en door een punt $\big(x, f(x)\big)$ op de grafiek van *f*, dus geldt: $a = \frac{f(x)}{x}$.

Omdat dit de raaklijn is in het punt $\big(x, f(x)\big)$ geldt ook $a = f'(x)$.

Samen geeft dit $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Zodoende krijgen we

$f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \dfrac{-6}{(2x-3)^2} = \dfrac{3}{(2x-3) \cdot x} \Leftrightarrow -6x = 3(2x-3) \Leftrightarrow -12x = -9 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

Dit geeft $a = f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-6}{\left(1\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \frac{-6}{2\frac{1}{4}} = -6 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{8}{3}$

De vergelijking van de raaklijn is dus $y = -\frac{8}{3}x$.

Vraag 2a

Merk op dat $|AM| = |BM|$.

Uit $\angle A = \angle B$ volgt dat *ABC* een *gelijkbenige driehoek* is met $|AC| = |BC|$.

Hieruit volgt dat driehoeken *AMC* en *BMC* congruent zijn (ZZZ), dus geldt $\angle ACM = \angle BCM$.

Omdat *M* binnen driehoek *ABC* ligt, volgt hieruit dat *CM* de bissectrice is van $\angle C$.

Alternatief:

De driehoeken *AMB*, *AMC* en *BMC* zijn net als *ABC* gelijkbenig.

Zo zien we:

1. $\angle ACM = \angle CAM$
2. $\angle CAM + \angle BAM = \angle CAB = \angle BAC = \angle ABM + \angle CBM$
   omdat $\angle ABM = \angle BAM$ volgt hieruit $\angle CAM = \angle CBM$
3. $\angle CBM = \angle BCM$

Samengevat geeft dit: $\angle ACM = \angle CAM = \angle CBM = \angle BCM$

Omdat *M* binnen driehoek *ABC* ligt, volgt hieruit dat *CM* de bissectrice is van $\angle C$.

Vraag 2b

Noem het tweede snijpunt *D*. *D* ligt dus zowel op de cirkel met middellijn *AB* als op de cirkel met middellijn *AC*.

Volgens de stelling van *Thales* zijn dan zowel *ABD* als *ACD* rechthoekige driehoeken.

Dit betekent dat $\angle BDA = \angle ADC = 90°$

Hieruit volgt $\angle BDC = \angle BDA + \angle ADC = 90° + 90° = 180°$.

$\angle BDC$ is dus een *gestrekte hoek*.

Hieruit volgt dat de lijnstukken *BD* en *DC* in elkaars verlengde liggen, ofwel dat *D* op de zijde *BC* ligt.

Vraag 3a

$f'(x) = 4 \cdot 2\cos(2x) \cdot \cos(2x) + 4 \cdot \sin(2x) \cdot (-2\sin(2x)) = 8\cos^2(2x) - 8\sin^2(2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2(2x) = \sin^2(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(2x) \vee \cos(2x) = -\sin(2x)$

$\cos(2x) = \sin(2x) \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2}$

Dit geeft $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 = 2 + 2 = 4$, dit zijn de maxima van de grafiek.

$\cos(2x) = -\sin(2x) \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2}$

Dit geeft $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 = -2 + 2 = 0$, dit zijn de minima van de grafiek.

Alternatief

$f(x) = 2 \cdot 2\sin(2x)\cos(2x) + 2 = 2\sin(4x) + 2$

Deze functie heeft een minimum als $\sin(4x) = -1$.

De minimumwaarde is dus $2 \cdot -1 + 2 = -2 + 2 = 0$.

Vraag 3b

$f(x) = 2 \cdot 2\sin(2x)\cos(2x) + 2 = 2\sin(4x) + 2$

Voor het eerste nulpunt rechts van de *y*-as geldt:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(4x) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin(4x) = -1$

Dit geeft $4x = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}\pi$

Te berekenen is zodoende

$$\int_0^{\frac{3}{8}\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{3}{8}\pi} 2\sin(4x) + 2\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(4x) + 2x\right]_0^{\frac{3}{8}\pi} = 0 + \frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}$$

Vraag 3c

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4\sin(2x)\cos(2x) + 2 = 4\sin(3x)\sin(2x) + 2 \Leftrightarrow \sin(2x)\cos(2x) = \sin(3x)\sin(2x)$

Hieruit volgt $\sin(2x) = 0$ of $\cos(2x) = \sin(3x)$.

$\sin(2x) = 0$ geeft $2x = 0 + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

$\cos(2x) = \sin(3x)$ geeft $\sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(3x)$

Hieruit volgt $2x + \frac{1}{2}\pi = 3x + k \cdot 2\pi$ of $2x + \frac{1}{2}\pi = \pi - 3x + k \cdot 2\pi$

Dit geeft $-x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$

Hier zijn verschillende alternatieve uitwerkingen mogelijk, bijvoorbeeld:

$\cos(2x) = \sin(3x)$ geeft $\cos(2x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - 3x)$

Hieruit volgt $2x = \frac{1}{2}\pi - 3x + k \cdot 2\pi$ of $2x = -(\frac{1}{2}\pi - 3x) + k \cdot 2\pi$

Dit geeft $5x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$ of $-x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

Oplossingen in het interval $[0, \pi]$:

$x = 0 + k \cdot \frac{1}{2}\pi$ geeft $x = 0$; $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \pi$.

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi$.

$x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$ geeft $x = \frac{1}{10}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \frac{9}{10}\pi$.

Merk op dat $x = \frac{1}{2}\pi$ in alle drie de reeksen staat. Deze oplossing hoeft uiteraard maar één keer genoemd te worden.

Vraag 4a

$f_1'(x) = \mathrm{e}^{-2x^2} + x \cdot -4x \cdot \mathrm{e}^{-2x^2} = (1-4x^2) \cdot \mathrm{e}^{-2x^2}$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$; bereik: $\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right]$

Vraag 4b

$f_a'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-ax^2} + x \cdot (-2ax) \cdot \mathrm{e}^{-ax^2} = (1-2ax^2) \cdot \mathrm{e}^{-ax^2}$

$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{2a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}}$

De x-coördinaten van de toppen zijn zodoende $x = \sqrt{\frac{1}{2a}}$ en $x = -\sqrt{\frac{1}{2a}}$

De y-coördinaten van de toppen zijn dan

$y = f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot \frac{1}{2a}} = \sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ en $y = f\left(-\sqrt{\frac{1}{2a}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot \frac{1}{2a}} = -\sqrt{\frac{1}{2a}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

De toppen liggen dus alle op de lijn $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \cdot x$

Vraag 4c

$f_2'(x) = (1-4x^2) \cdot \mathrm{e}^{-2x^2}$, dus $f_2''(x) = -8x \cdot \mathrm{e}^{-2x^2} + (1-4x^2) \cdot \mathrm{e}^{-2x^2} \cdot (-4x) = (16x^3 - 12x) \cdot \mathrm{e}^{-2x^2}$

$f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow 16x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(4x^2-3) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \vee 4x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Vraag 4d

Als $0 < p < f_2'(0)$ snijdt de lijn $y = px$ de grafiek van f_2 niet alleen in de oorsprong, maar ook in een punt linksonder en in een punt rechtsboven de oorsprong.

$f_2'(x) = (1-4x^2) \cdot \mathrm{e}^{-2x^2}$, dus $f_2'(0) = 1$.

Er zijn zodoende drie snijpunten als $0 < p < 1$.

Alternatief

$f_2(x) = px \Leftrightarrow x \cdot \mathrm{e}^{-2x^2} = px \Leftrightarrow x = 0 \vee \mathrm{e}^{-2x^2} = p$

Er zijn drie snijpunten als $\mathrm{e}^{-2x^2} = p$ twee oplossingen heeft.

Hiervoor moet p om te beginnen positief zijn. In dat geval krijgen we $-2x^2 = \ln p \Leftrightarrow 2x^2 = -\ln p$

Er moet dus gelden $-\ln p > 0 \Leftrightarrow \ln p < 0 \Leftrightarrow 0 < p < 1$.

Vraag 5a

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 8 - x^2 = 3 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 21$

$x = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2} \vee x = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}$

Vraag 5b

$h(x) = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \ln(8 - x^2) - \ln(3 - x) = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{8 - x^2}{3 - x}\right) = \ln(\frac{4}{5})$

Dit geeft

$\dfrac{8 - x^2}{3 - x} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow 5(8 - x^2) = 4(3 - x) \Leftrightarrow 40 - 5x^2 = 12 - 4x \Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 28 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -28 = 16 + 560 = 576 \Rightarrow \sqrt{D} = 24.$

Oplossingen:

$x = \dfrac{4 + 24}{10} = 2\frac{4}{5} \vee \; x = \dfrac{4 - 24}{10} = -2$

Vraag 5c

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \dfrac{-2x}{8 - x^2} - \dfrac{-1}{3 - x} = \dfrac{-2x}{8 - x^2} + \dfrac{1}{3 - x}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3 - x} = \dfrac{2x}{8 - x^2} \Leftrightarrow 8 - x^2 = 2x(3 - x) \Leftrightarrow 8 - x^2 = 6x - 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

Voor $x = 4$ zijn zowel $f(x)$ als $g(x)$ niet gedefinieerd, dus daar heeft *h* geen extreem.

Tussen de twee snijpunten van de grafieken van *f* en *g* moet *h* een maximum hebben. Dit kan alleen bij $x = 2$ zijn, dus heeft *h* hier een extreme waarde.

Vraag 5d

De inhoud van het omwentelingslichaam wordt gegeven door $\pi \cdot \int_a^b x^2 \, dy$

$a = kleinste\ y - waarde = 0$ (op de *x*-as)

$b = grootste\ y - waarde = f(0) = \ln(8)$

$y = \ln(8 - x^2)$ geeft $e^y = 8 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 8 - e^y$

Zo zien we:

$$Inhoud = \pi \cdot \int_0^{\ln 8} x^2 \, dy = \pi \cdot \int_0^{\ln 8} 8 - e^y \, dy = \pi \cdot [8y - e^y]_0^{\ln 8} = \pi \cdot (8 \ln 8 - 8 - (0 - 1)) = \pi \cdot (8 \ln 8 - 7)$$