CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum:	28 juli 2014
Tijd:	14.00 - 17.00 uur
Aantal opgaven:	5

Zet uw naam op alle in te leveren blaadjes.

Laat bij elke opgave door middel van een redenering, een berekening of een toelichting op het gebruik van de grafische rekenmachine zien hoe het antwoord verkregen is. Als deze ontbreekt worden voor het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen tipp-ex o.i.d.. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een (grafische) rekenmachine van een type dat goedgekeurd is voor het Centraal Examen Wiskunde van het vwo. Overige hulpmiddelen, zoals formulekaart, BINAS en tabellenboek zijn NIET toegestaan. Op bladzijde 4 is een lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden.

Op www.ccvx.nl vindt u vanaf begin volgende week:

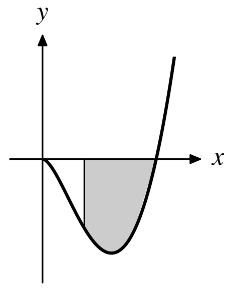
- de uitwerkingen van dit tentamen;
- de stand van zaken van de correctie van het tentamen.

U wordt dringend verzocht om de Open Universiteit niet te bellen of te mailen over uw uitslag. Deze wordt zo spoedig mogelijk naar u opgestuurd.

Te behalen punten per onderdeel:					
Opgave	1	2	3	4	5
a	6	4	5	6	4
b	3	3	4	7	3
c	6	3	6	6	6
d			6	4	8
Totaal	15	10	21	23	21

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

1 Hiernaast ziet u de grafiek van de functie $f(x) = 9x^2 \cdot \ln x$.



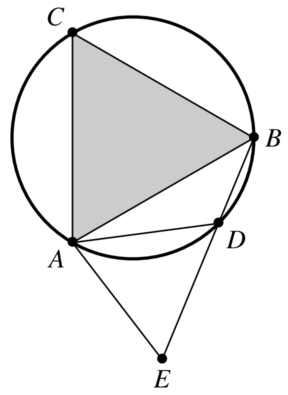
6 pt **a** Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f.

3 pt **b** Toon aan dat $F(x) = x^3 \cdot (3 \ln x - 1)$ een primitieve is van f.

In de figuur wordt het grijze vlakdeel begrensd door de x-as, de grafiek van f en de lijn $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

6 pt **c** Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.

2 De punten A, B en C in de figuur hiernaast zijn hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.
Op de cirkel door A, B en C ligt een punt D.
D ligt op de cirkelboog tussen de punten A en B.
Op het verlengde van het lijnstuk BD, aan de kant van D, ligt het punt E zo, dat $|AE| = |DE|$.
Op bladzijde 3 vindt u een vergrote afdruk van deze figuur.



4 pt **a** Bewijs dat ADE een gelijkzijdige driehoek is.

3 pt **b** Bewijs dat de driehoeken CAD en BAE congruent zijn.

3 pt **c** Bewijs dat $|DC| = |DA| + |DB|$

3 Gegeven de functies $f_a(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + a}$ en $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

5 pt **a** Bereken voor welke waarden van a de grafiek van f_a een horizontale raaklijn heeft.

4 pt **b** Bepaal het bereik van de functie f_1.
Motiveer uw antwoord zonder gebruik de maken van de grafische rekenmachine.

6 pt **c** Los algebraïsch op: $f_1(x) = g(x)$.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van g, de grafiek van $y = \sqrt{x}$ en de lijnen $x = 1$ en $x = 4$.

6 pt **d** Bereken algebraïsch de oppervlakte van V.

4 Gegeven de functies $f(x) = \cos(x) + \cos(\frac{1}{3}\pi - x)$ en $g(x) = \sin(x) + \sin(\frac{1}{3}\pi - x)$.
Punt A is het punt op de grafiek van f waarvoor geldt $x_A = -\frac{1}{6}\pi$.

6 pt **a** Stel met een exacte berekening een vergelijking op voor de raaklijn aan de grafiek van f in punt A.

7 pt **b** Los de vergelijking $g(x) = 0$ algebraïsch op en geef alle oplossingen op het interval $[-2\pi, 2\pi]$.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

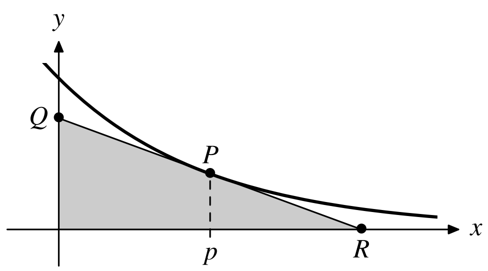
6 pt **c** Toon algebraïsch aan dat $h'(x) = 0$ voor alle x in het domein van h.

4 pt **d** Beschrijf met behulp van het resultaat van vraag c het verloop van de grafiek van h.

5 Gegeven de functie $f(x) = e^{-x}$.
$P(p, f(p))$ is een willekeurig punt op de grafiek van f.

4 pt **a** Toon aan dat de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in punt P geschreven kan worden als $y = e^{-p} \cdot (1 + p - x)$.

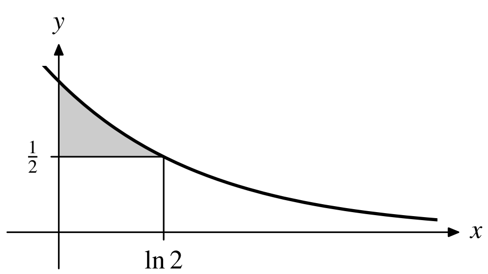
Voor $p > 0$ snijdt de raaklijn aan de grafiek van f in punt P de y-as in punt Q en de x-as in punt R. Zo ontstaat de driehoek OQR (het grijze gebied in de figuur hieronder).



3 pt **b** Toon aan dat voor iedere $p > 0$ de oppervlakte van driehoek OQR gelijk is aan $\dfrac{(p+1)^2}{2} \cdot e^{-p}$.

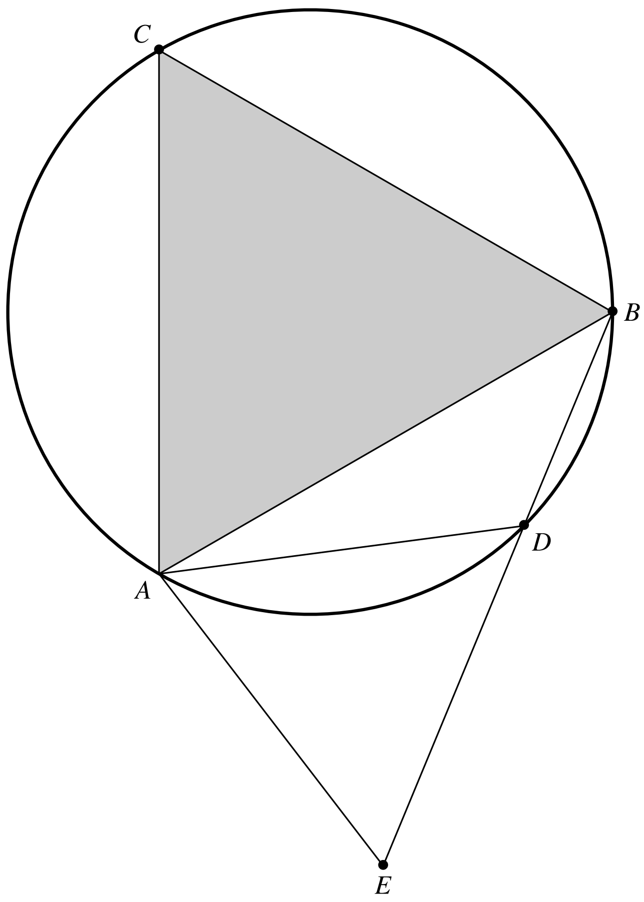
6 pt **c** Bereken exact de waarde van p waarvoor de oppervlakte van driehoek OQR maximaal is.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de horizontale lijn $y = \frac{1}{2}$ en de y-as (het grijze gebied in de figuur hieronder).



8 pt **d** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V gewenteld wordt rond de x-as.

Antwoordblad bij opgave 2 Naam: _______________



Lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen voor het voortentamen Wiskunde B

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u \qquad \sin t + \sin u = 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u \qquad \sin t - \sin u = 2\sin\frac{t-u}{2}\cos\frac{t+u}{2}$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u \qquad \cos t + \cos u = 2\cos\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u \qquad \cos t - \cos u = -2\sin\frac{t+u}{2}\sin\frac{t-u}{2}$$

Opgave 1a

- ⋆ Schrijf $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ met $g(x) = 9x^2$ en $h(x) = \ln x$.
  Dit geeft $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = 18x \cdot \ln x + 9x^2 \cdot \dfrac{1}{x}$
- ⋆ $\ldots = 18x \ln x + 9x$
- ⋆ Schrijf $f'(x) = 18x \cdot h(x) + 9x$ met $h(x) = \ln x$.
  Dit geeft $f''(x) = 18 \cdot h(x) + 9x \cdot h'(x) + 9 = 18 \ln x + 18x \cdot \dfrac{1}{x} + 9 = 18 \ln x + 18 + 9$
  dus $f''(x) = 18 \ln x + 27$
- ⋆ $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 18 \ln x + 27 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{27}{18} = -\frac{3}{2}$
- ⋆ Dit geeft $x = \mathrm{e}^{-3/2}$
- ⋆ en $y = 9 \cdot \left(\mathrm{e}^{-3/2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{2}\mathrm{e}^{-3}$

Opgave 1b

- ⋆ $F'(x) = 3x^2 \cdot (3 \ln(x) - 1) + x^3 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{x}$
- ⋆ $\ldots = 9x^2 \cdot \ln x - 3x^2 + 3x^2 = f(x)$

Opgave 1c

- ⋆ $f(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- ⋆ Voor $0 < x < 1$ geldt $f(x) < 0$ (zie grafiek).
  Te berekenen is dus $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}}^{1} -f(x)\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\ldots = [-F(x)]_{1/\mathrm{e}}^{1} = -F(1) + F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$
- ⋆ $\ldots = -1 \cdot (3 \cdot 0 - 1) + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} \cdot (3 \cdot -1 - 1)$
- ⋆ $\ldots = 1 - \dfrac{4}{\mathrm{e}^3}$

Opgave 2a

- ⋆ Omdat $ADBC$ een <u>*koordenvierhoek*</u> is, geldt $\angle ADB + \angle ACB = 180°$.
- ⋆ Uit $\angle ADB + \angle ADE = 180°$ volgt dan $\angle ADE = \angle ACB = 60°$.
- ⋆ $|AE| = |DE|$, dus ADE is een gelijkbenige driehoek.
  In deze driehoek geldt $\angle DAE = \angle AED$ en $\angle DAE + \angle AED + \angle ADE = 180°$
- ⋆ Uit $\angle ADE = 60°$ volgt dan $\angle DAE = \angle AED = 60°$
  Een driehoek met drie hoeken van 60° is een gelijkzijdige driehoek.

Alternatief voor de laatste 2 stappen:

- ⋆ Driehoek ADE is gelijkvormig met de gelijkzijdige driehoek ABC en is dus zelf ook een gelijkzijdige driehoek.
- ⋆ Gelijkvormigheidsgeval *zhz*:
  De zijden AD en DE zijn gelijk, net als zijden AB en BC
  De ingesloten hoek is in beide driehoeken 60°

Opgave 2b

- $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle DAE + \angle DAB = \angle BAE$
- Driehoeken CAD en BAE zijn congruent volgens congruentiegeval ZHZ:
  Z: $|CA| = |BA|$ *driehoek ABC is gelijkzijdig*
  H: $\angle CAD = \angle BAE$ *zie hierboven*
  Z: $|AD| = |AE|$ *driehoek ADE is gelijkzijdig*

Opgave 2c

- $|DC| = |BE|$ *overeenkomstige zijden in de congruente driehoeken CAD en BAE*
- $|DE| = |DA|$ *driehoek ADE is gelijkzijdig*
- Hieruit volgt: $|DC| = |BE| = |DE| + |DB| = |DA| + |DB|$

Opgave 3a

- Schrijf $f_a(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ met $t(x) = \sqrt{x}$ en $n(x) = x + a$,
  dus $t'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $n'(x) = 1$
- Dit geeft $f_a'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{n^2(x)} = \dfrac{\dfrac{x+a}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+a)^2}$
- $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+a}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 0$
- $\ldots \Leftrightarrow x + a - \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x + a - 2x = 0 \Leftrightarrow x = a$
- Voor $a \leq 0$ valt $x = a$ buiten het domein van f_a en heeft de grafiek van f_a geen horizontale raaklijn,
  voor $a > 0$ is er een horizontale raaklijn voor $x = a$.

Opgave 3b

- $f_1(0) = 0$ en voor $x > 0$ geldt $f_1(x) > 0$, dus de minimale waarde van $f_1(x)$ is 0.
- Uit vraag a volgt dat f_1 een mogelijk extreem heeft voor $x = 1$.
- Omdat $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = \frac{1}{2}$ en $f_1(4) = \frac{2}{5}$, volgt hieruit dat f_1 een maximum heeft voor $x = 1$.
- Het bereik bestaat dus uit alle waarden van y met $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$.
  Anders gezegd: het domein is het interval $[0, \frac{1}{2}]$.

Opgave 3c

- $f_1(x) = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$
  Alle termen vermenigvuldigen met $\sqrt{x}$ geeft: $\dfrac{x}{x+1} = x - 2$
  Links en rechts vermenigvuldigen met $x + 1$ geeft: $x = (x-2)(x+1)$
- Hieruit volgt $x = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$
- De discriminant van deze laatste vergelijking is $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -2 = 12$.
  Er zijn dus twee oplossingen:
  $x = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2}$ en $x = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2}$
- De tweede oplossing is echter negatief en valt dus buiten het domein van de functies f_1 en g.
  De enige oplossing van de vergelijking $f_1(x) = g(x)$ is $x = \dfrac{2+\sqrt{12}}{2}$ $\left(= 1 + \sqrt{3}\right)$.

Opgave 3d

- $g(x) = \sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} < \sqrt{x}$
- Te berekenen is dus $\int_1^4 \sqrt{x} - g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\ldots = \int_1^4 \sqrt{x} - \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 2x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$
- $\ldots = \left[2 \cdot 2x^{1/2}\right]_1^4 = \left[4\sqrt{x}\right]_1^4$
- $\ldots = 8 - 4 = 4$

Opgave 4a

- $f'(x) = -\sin(x) + (-\sin(\frac{1}{3}\pi - x) \cdot (-1) = -\sin(x) + \sin(\frac{1}{3}\pi - x)$
- $f'(-\frac{1}{6}\pi) = -\sin(-\frac{1}{6}\pi) + \sin(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}$
- $f(-\frac{1}{6}\pi) = \cos(-\frac{1}{6}\pi) + \cos(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- In $y = ax + b$ kunnen we dus invullen $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $a = 1\frac{1}{2}$ en $x = -\frac{1}{6}\pi$
  Dit geeft $\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{4}\pi + b$
- Hieruit volgt $b = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\pi$.
  De vergelijking is dus $y = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\pi$.

Alternatief:

- De derde formule van Simpson geeft
  $f(x) = 2\cos(\frac{1}{6}\pi)\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \sqrt{3} \cdot \cos(x - \frac{1}{6}\pi)$.
- Dit geeft $f'(x) = -\sqrt{3} \cdot \sin(x - \frac{1}{6}\pi)$
- $f'(-\frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3} \cdot \sin(-\frac{1}{3}\pi) = -\sqrt{3} \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$
- $f(-\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{3} \cdot \cos(-\frac{1}{3}\pi) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Opstellen vergelijking raaklijn als hierboven.

Opgave 4b

- ⋆ $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\sin(\frac{1}{3}\pi - x) \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(x - \frac{1}{3}\pi)$
- ⋆ Dit geeft $x = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \pi - (x - \frac{1}{3}\pi) + k \cdot 2\pi$
- ⋆ $x = x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$ heeft geen oplossingen.
- ⋆ $x = \pi - (x - \frac{1}{3}\pi) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \pi - x + \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
- ⋆ Hieruit volgt $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$.
- ⋆ Oplossingen op het interval $[-2\pi, 2\pi]$:
  $x = \frac{2}{3}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi + \pi = 1\frac{2}{3}\pi$;
  $x = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{1}{3}\pi$; $x = \frac{2}{3}\pi - 2\pi = -1\frac{1}{3}\pi$

Alternatief:

- ⋆ De eerste formule van Simpson geeft
  $g(x) = 2\sin(\frac{1}{6}\pi)\cos(x - \frac{1}{6}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x - \frac{1}{6}\pi) = \cos(x - \frac{1}{6}\pi)$
- ⋆ $g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x - \frac{1}{6}\pi) = 0$
- ⋆ Dit geeft $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
- ⋆ Hieruit volgt $x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$
- ⋆ Oplossingen op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ als hierboven.

Opgave 4c

- ⋆ $f'(x) = -\sin(x) + \sin(\frac{1}{3}\pi - x)$
- ⋆ $g'(x) = \cos(x) - \cos(\frac{1}{3}\pi - x)$
- ⋆ $h'(x) = \dfrac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} =$
  $\dfrac{(\sin(x) + \sin(\frac{1}{3}\pi - x))(-\sin(x) + \sin(\frac{1}{3}\pi - x)) - (\cos(x) + \cos(\frac{1}{3}\pi - x))(\cos(x) - \cos(\frac{1}{3}\pi - x))}{(g(x))^2}$
- ⋆ $\ldots = \dfrac{(-\sin^2(x) + \sin^2(\frac{1}{3}\pi - x)) - (\cos^2(x) - \cos^2(\frac{1}{3}\pi - x))}{(g(x))^2}$
- ⋆ $\ldots = \dfrac{-\sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin^2(\frac{1}{3}\pi - x) + \cos^2(\frac{1}{3}\pi - x)}{(g(x))^2}$
- ⋆ $\ldots = \dfrac{-1 + 1}{(g(x))^2} = \dfrac{0}{(g(x))^2}$
- ⋆ Omdat in het domein van h geldt dat $g(x) \neq 0$, is $h'(x)$ voor alle x in het domein gelijk aan 0.

Alternatief:

- ⋆ De derde formule van Simpson geeft $f(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x - \frac{1}{6}\pi)$.
  De eerste formule van Simpson geeft $g(x) = \cos(x - \frac{1}{6}\pi)$.
- ⋆ Dit geeft $h(x) = \sqrt{3}$.
- ⋆ Hieruit volgt $h'(x) = 0$.

Opgave 4d

- ⋆ De grafiek loopt op het hele domein horizontaal.
- ⋆ De grafiek wordt echter onderbroken bij de x-waarden waarvoor $g(x) = 0$.
- ⋆ $h(0) = \dfrac{\cos(0) + \cos(\frac{1}{3}\pi)}{\sin(0) + \sin(\frac{1}{3}\pi)} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{0 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
- ⋆ Omdat f en g periodieke functies zijn, geldt ook voor de andere delen van de grafiek van h dat $h(x) = \sqrt{3}$.
  De grafiek bestaat dus uit de lijn $y = \sqrt{3}$ met uitzondering van de punten waarvoor $g(x) = 0$.

Alternatief:

- ⋆ De in c gevonden formule $h(x) = \sqrt{3}$ geldt niet als $g(x) = 0$.
- ⋆ De grafiek bestaat dus uit de horizontale lijn $y = \sqrt{3}$ minus de punten waarvoor $g(x) = 0$.

Opgave 5a

- ⋆ $f'(x) = -e^{-x}$.
- ⋆ Dit geeft $f'(p) = -e^{-p}$.
- ⋆ De raaklijn in punt P is dus de lijn door (p, e^{-p}) met r.c. $-e^{-p}$.
  In $y = ax + b$ kunnen we dus invullen $y = e^{-p}$, $a = -e^{-p}$ en $x = p$.
- ⋆ Dit geeft $e^{-p} = -e^{-p} \cdot p + b$, dus $b = e^{-p} + p \cdot e^{-p} = (1 + p) \cdot e^{-p}$.
  De vergelijking van de raaklijn is dus $y = -e^{-p} \cdot x + (1 + p) \cdot e^{-p}$
  e^{-p} buiten haakjes halen geeft de gevraagde formule.

Opgave 5b

- ⋆ $x = 0$ geeft $y = (1 + p) \cdot e^{-p}$
  Dit is de hoogte van de driehoek.
- ⋆ $y = 0$ geeft $e^{-p} \cdot (1 + p - x) = 0 \Leftrightarrow 1 + p - x = 0 \Leftrightarrow x = 1 + p$
  Dit is de breedte van de driehoek.
- ⋆ De oppervlakte van de driehoek is dus $\frac{1}{2} \cdot (1 + p) \cdot e^{-p} \cdot (1 + p) = \dfrac{(p + 1)^2}{2} \cdot e^{-p}$

Opgave 5c

Schrijf $D_p = g(p) \cdot h(p)$ met $g(p) = \dfrac{(1 + p)^2}{2}$ en $h(p) = e^{-p}$

- ⋆ $g(p) = \frac{1}{2} + p + \frac{1}{2}p^2$, dus $g'(p) = 1 + p$
  Kan ook met de kettingregel met $u = 1 + p$, dus $g(p) = \frac{1}{2}u^2$
  Dit geeft $g'(p) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot [1 + p]' = u \cdot 1 = 1 + p$.
- ⋆ Zo zien we $\dfrac{dD_p}{dp} = (1 + p) \cdot e^{-p} + \dfrac{(1 + p)^2}{2} \cdot -e^{-p} = \left(1 + p - \dfrac{(1 + p)^2}{2}\right) \cdot e^{-p}$
- ⋆ $\dfrac{dD_p}{dp} = 0$ geeft $1 + p - \dfrac{(1 + p)^2}{2} = 0$
- ⋆ $\ldots \Leftrightarrow 1 + p - \frac{1}{2} - p - \frac{1}{2}p^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p^2 = 1$
- ⋆ Aangezien $p > 0$ is $p = 1$ de enige oplossing.

Opgave 5d

- ⋆ De inhoud van het omwentelingslichaam van de grafiek van f tussen de y-as en de lijn $x = \ln 2$ wordt gegeven door $\pi \cdot \int_0^{\ln 2} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-2x} \, \mathrm{d}x$
- ⋆ $\ldots = \pi \cdot \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$
- ⋆ $\ldots = \pi \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1\right) = \frac{3}{8}\pi$
- ⋆ De inhoud van het omwentelingslichaam van de lijn $y = \frac{1}{2}$ tussen de y-as en de lijn $x = \ln 2$ is $\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ln 2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \ln 2$
- ⋆ De inhoud van het omwentelingslichaam van V is dus $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\ln 2\right) \cdot \pi$