CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum: 3 juni 2014
Tijd: 14.00 - 17.00 uur
Aantal opgaven: 5

Zet uw naam op alle in te leveren blaadjes.

Laat bij elke opgave door middel van een redenering, een berekening of een toelichting op het gebruik van de grafische rekenmachine zien hoe het antwoord verkregen is. Als deze ontbreekt worden voor het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen tipp-ex o.i.d.. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een (grafische) rekenmachine van een type dat goedgekeurd is voor het Centraal Examen Wiskunde van het vwo. Overige hulpmiddelen, zoals formulekaart, BINAS en tabellenboek zijn NIET toegestaan. Op bladzijde 3 is een lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden.

Op www.ccvx.nl vindt u vanaf begin volgende week:

- de uitwerkingen van dit tentamen;
- de stand van zaken van de correctie van het tentamen.

U wordt dringend verzocht om de Open Universiteit niet te bellen of te mailen over uw uitslag. Deze wordt zo spoedig mogelijk naar u opgestuurd.

Te behalen punten per onderdeel:					
Opgave	1	2	3	4	5
a	5	5	6	6	5
b	8	4	8	6	8
c	7		4	6	6
d					6
Totaal	20	9	18	18	25
Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$					

1 Gegeven de functie $f(x) = 8x^{\frac{3}{2}}$.

Punt A is het punt op de grafiek van f waarvoor geldt dat $x_A = 4$.
Punt B is het snijpunt van de y-as en de raaklijn aan de grafiek van f in punt A.

5 pt **a** Bereken y_B algebraïsch.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de y-as en de lijn $y = 1$.

8 pt **b** Bereken de oppervlakte van vlakdeel V algebraïsch.

Door het punt (1,0) gaan twee rechte lijnen die raken aan de grafiek van f.

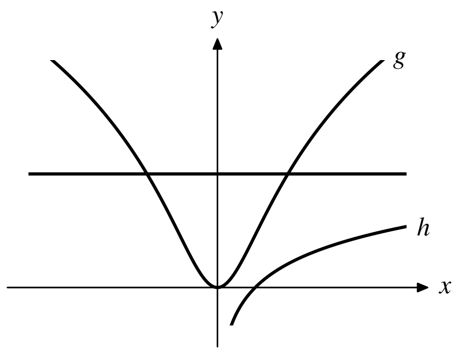
7 pt **c** Bereken algebraïsch de coördinaten van de punten waar deze raaklijnen de grafiek van f raken.

2 Van een vierhoek $ABCD$ is gegeven dat de zijden AB en CD evenwijdig zijn en dat $\angle A$ en $\angle B$ beide scherpe hoeken zijn.

5 pt **a** Toon aan dat als de zijden AD en BC even lang zijn, de hoekpunten van deze vierhoek op één cirkel liggen.

4 pt **b** Toon aan dat als de hoekpunten van deze vierhoek op één cirkel liggen, de zijden AD en BC even lang zijn.

3 In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie $g(x) = 2\ln(x^2 + 1)$, de horizontale lijn $y = 3$ en de grafiek van de functie $h(x) = \ln x$.



De grafiek van g heeft twee buigpunten.

6 pt **a** Bereken de coördinaten van deze twee buigpunten algebraïsch.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van g en de lijn $y = 3$.

8 pt **b** Bereken algebraïsch de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V wordt gewenteld rond de y-as.

Voor iedere $p > 0$ is A_p het punt $(p,g(p))$ en is B_p het punt $(p,h(p))$.
Omdat de grafieken van g en h elkaar niet snijden, is er een waarde van p waarvoor de afstand tussen de punten A_p en B_p minimaal is.

4 pt **c** Bereken deze waarde van p algebraïsch.

4 Op het interval $[0,\pi]$ is gegeven de functie $k(x) = \sin 2x + \cos 2x$.
Op de grafiek van k ligt het punt P met $x_P = \frac{1}{4}\pi$.
De raaklijn aan de grafiek van k in punt P snijdt de x-as in het punt Q.

6 pt **a** Bereken exact de oppervlakte van driehoek OPQ.

6 pt **b** Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van k, de x-as en de y-as.

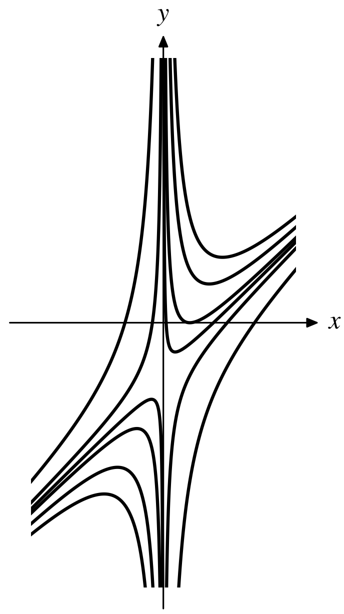
De grafiek van k is een sinusoïde (dit hoeft u niet aan te tonen).
$k(x)$ kan daarom geschreven worden in de vorm $k(x) = a + b \cdot \sin(cx + d)$

6 pt **c** Bereken de exacte waarden van a, b, c en d.

5 Voor alle reële waarden van a wordt de functie f_a gegeven door

$$f_a(x) = x - 2 + \frac{a-3}{x}$$

Voor een aantal waarden van a is de grafiek van f_a getekend in de figuur hiernaast.



5 pt **a** Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek van f_a twee *verschillende* snijpunten met de x-as heeft.

In de figuur zien we dat de grafiek van f_a voor sommige waarden van a twee toppen heeft (een maximum links van de y-as en een minimum rechts van de y-as), maar dat er voor andere waarden van a geen toppen zijn.

8 pt **b** Bereken exact voor welke waarden van a de grafiek twee toppen heeft en toon aan dat al deze toppen op dezelfde rechte lijn liggen.

6 pt **c** Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de horizontale lijn $y = 1$ en de grafiek van f_5.

6 pt **d** Bereken exact voor welke waarde(n) van q de horizontale lijn $y = q$ de grafiek van f_8 snijdt in twee punten die op afstand 4 van elkaar liggen.

Lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen voor het voortentamen Wiskunde B

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:
gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:
middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:
hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zzr; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:
hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:
koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u \qquad \sin t + \sin u = 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u \qquad \sin t - \sin u = 2\sin\frac{t-u}{2}\cos\frac{t+u}{2}$$

$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u \qquad \cos t + \cos u = 2\cos\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$$

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u \qquad \cos t - \cos u = -2\sin\frac{t+u}{2}\sin\frac{t-u}{2}$$

Opgave 1a

- ⋆ $f'(x) = 8 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 8 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} = 12\sqrt{x}$
- ⋆ In $y = ax + b$ kunnen we dus invullen $y_A = f(4) = 8 \cdot 4^{\frac{3}{2}} = 8 \cdot 2^3 = 64$, $a = f'(4) = 12 \cdot 2 = 24$ en $x_A = 4$
- ⋆ Dit geeft $y_B = b = y_A - a \cdot x_A = 64 - 24 \cdot 4 = -32$

Opgave 1b

- ⋆ $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- ⋆ Te berekenen is dus $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} 1 - 8x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\ldots = \left[x - 8 \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}}$
- ⋆ $\ldots = \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{32} - 0 + 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$

Opgave 1c

We geven de raakpunten aan als $P(p, f(p))$

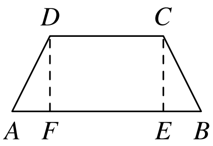
- ⋆ De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en (0,1) is $\dfrac{y_P - 0}{x_P - 1} = \dfrac{f(p)}{p-1}$
  Dit moet gelijk zijn aan $f'(p) = 12\sqrt{p}$
- ⋆ Dit geeft $\dfrac{8p\sqrt{p}}{p-1} = 12\sqrt{p} \Leftrightarrow p = 0 \vee \dfrac{8p}{p-1} = 12$
- ⋆ $p = 0$ geeft raakpunt (0,0).
- ⋆ $\dfrac{8p}{p-1} = 12 \Leftrightarrow 8p = 12p - 12 \Leftrightarrow -4p = -12 \Leftrightarrow p = 3$
- ⋆ $p = 3$ geeft raakpunt $(3{,}24\sqrt{3})$

Opgave 2a

EERSTE MOGELIJKHEID:

Trek de loodlijn uit C op zijde AB. Noem he snijpunt van AB met deze loodlijn E

Trek ook de loodlijn uit D op zijde AB. Noem het snijpunt van AB met deze loodlijn F.



⋆ Driehoeken ADF en BCE zijn congruent volgens concruentiegeval ZZR:
Z: $|AD| = |BC|$ *gegeven*
Z: $|DF| = |CE|$ *overstaande zijden in de rechthoek FECD*
R: $\angle AFD = \angle BEC = 90°$
Dit betekent dat $\angle A = \angle B$.
Alternatief: $\sin \angle A = \dfrac{|DF|}{|AD|} = \dfrac{|CE|}{|BC|} = \sin \angle B$

⋆ Hieruit volgt: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle ECB + \angle ECD = 180° - \angle BEC + \angle ECB = 180° - 90° + 90° = 180°$

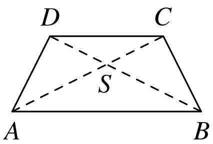
⋆ Omdat $\angle A + \angle C = 180°$, is $ABCD$ een <u>*koordenvierhoek*</u>.
De hoekpunten van een koordenvierhoek liggen op één cirkel.

Opgave 2a

TWEEDE MOGELIJKHEID:

Trek de diagonalen AC en BD.

S is het snijpunt van deze diagonalen.



⋆ Driehoeken ASB en CSD zijn gelijkvormig volgens gelijkvormigheidsgeval hh:
$\angle BAS = \angle DCS$ *Z-hoeken*
$\angle ABS = \angle CDS$ *Z-hoeken*

⋆ Driehoeken ASD en BSC zijn gelijkvormig volgens gelijkvormigheidsgeval zhz:
$AS : CS = BS : DS$ *gelijkvormigheid driehoeken ASB en CSD*
$\angle ASD = \angle BSC$ *overstaande hoeken*
Omdat $|AD| = |BC|$ volgt hieruit dat driehoeken ASD en BSC congruent zijn.

⋆ Hieruit volgt dat ASB en CSD gelijkbenig zijn.
Dit betekent dat de hoeken BAS, ABS, CDS en DCS alle vier even groot zijn.
Ook volgt $\angle ADS = \angle BCS$ en $\angle DAS = \angle DCS$

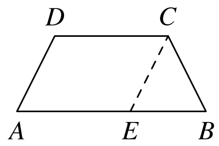
⋆ Uit de vorige stap volgt dat $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC$
Dit betekent dat $\angle BAD + \angle BCD = 180°$
De <u>*koordenvierhoekstelling*</u> zegt dan dat $ABCD$ een koordenvierhoek is.
Dit betekent dat deze punten op dezelfde cirkel liggen.

Opgave 2a

DERDE MOGELIJKHEID:

Trek een lijn door C evenwijdig aan AD.

E is het snijpunt van deze lijn met zijde AB



- ⋆ $AECD$ is een parallellogram.
  Dit geeft $\angle ADC = \angle AEC$.
  Maar ook $|EC| = |AD| = |BC|$.
  ECB is zodoende een gelijkbenige driehoek, dus $\angle BEC = \angle EBC$.
- ⋆ Hieruit volgt: $\angle ADC + \angle ABC = \angle AEC + \angle BEC = 180°$ *gestrekte hoek.*
- ⋆ De *koordenvierhoekstelling* zegt dan dat $ABCD$ een koordenvierhoek is.
  Dit betekent dat deze punten op dezelfde cirkel liggen.

Opgave 2b

EERSTE MOGELIJKHEID:

Met de punten E en F die we in vraag a geconstrueerd hebben volgt:

- ⋆ $\angle B = 180° - \angle CEB - \angle ECB = 180° - 90° - \angle BCE = 90° - \angle ECB$,
  dus $\angle ECB = 90° - \angle B$
  $\angle C = \angle ECB + \angle ECD = \angle ECB + 90° = 90° - \angle B + 90° = 180° - \angle B$,
  dus $\angle B + \angle C = 180°$ (*).
- ⋆ Omdat de hoekpunten van $ABCD$ op één cirkel liggen, is $ABCD$ een *koordenvierhoek*.
  Dit betekent dat $\angle A + \angle C = 180°$ (**).
- ⋆ Driehoeken ADF en BCE zijn congruent volgens congruentiegeval ZHH:
  Z: $|DF| = |CE|$ *overstaande zijden in de rechthoek FECD*
  H: $\angle AFD = \angle BEC = 90°$
  H: $\angle A = \angle B$ *volgt uit (*) en (**)*
  Dit betekent dat $|AD| = |BC|$.
  Alternatief: $|AD| = \dfrac{|DF|}{\sin \angle A} = \dfrac{|CE|}{\sin \angle B} = |BC|$

Opgave 2b

TWEEDE MOGELIJKHEID

Met de diagonalen AC en BD en hun snijpunt S volgt:

- ⋆ Op dezelfde manier als bij a volgt dat ASB gelijkvormig is met CSD en dat ASD gelijkvormig is met BSC.
- ⋆ De <u>*koordenvierhoekstelling*</u> geeft:
  $\angle BAD + \angle BCD = 180°$ en $\angle ABC + \angle ADC = 180°$
- ⋆ Hieruit kunnen we afleiden dat $\angle ABS = \angle BAS$,
  dus dat $|AS| = |BS|$ *gelijkbenige driehoeken*.
- ⋆ Dit betekent dat de driehoeken ASD en BSC congruent zijn, dus dat $|AD| = |BC|$

Opgave 2b

DERDE MOGELIJKHEID

Met het parallellogram $AECD$ volgt:

- ⋆ $\angle A = \angle B$ *constante hoek*
- ⋆ $\angle A = \angle BEC$ *F-hoeken*
- ⋆ $|EC| = |BC|$ *driehoek ECB is gelijkbenig*
- ⋆ $|AD| = |EC|$ *parallellogram*

Opgave 3a

- ⋆ Schrijf $y = 2\ln u$ met $u = x^2 + 1$.
  Dan geldt $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{2}{u}$ en $\dfrac{du}{dx} = 2x$.
- ⋆ Dit geeft $g'(x) = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \dfrac{2}{u} \cdot 2x = \dfrac{4x}{x^2+1}$
- ⋆ $g''(x) = \dfrac{(x^2+1)\cdot 4 - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4-4x^2}{(x^2+1)^2}$
- ⋆ $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- ⋆ $g(1) = g(-1) = 2\ln 2 = \ln 4$, dus de buigpunten zijn $(-1, \ln 4)$ en $(1, \ln 4)$.

Opgave 3b

- ⋆ $y = 2\ln(x^2+1) \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow x^2 + 1 = e^{\frac{1}{2}y} \Leftrightarrow x^2 = -1 + e^{\frac{1}{2}y}$
- ⋆ Te berekenen: $\pi \cdot \int_0^3 x^2 \, dy = \pi \cdot \int_0^3 -1 + e^{\frac{1}{2}y} \, dy$
- ⋆ $\ldots = \pi \cdot \left[-y + 2e^{\frac{1}{2}y}\right]_0^3$
- ⋆ $\ldots = \pi\left(-3 + 2e^{1,5} - (0+2)\right) = \pi \cdot (-5 + 2e^{1,5})$

Opgave 3c

- ⋆ De afstand tussen A_p en B_p wordt gegeven door $D(p) = g(p) - h(p)$
- ⋆ Dit geeft $D'(p) = g'(p) - h'(p) = \dfrac{4p}{p^2+1} - \dfrac{1}{p}$
- ⋆ $D'(p) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4p}{p^2+1} = \dfrac{1}{p} \Leftrightarrow 4p^2 = p^2 + 1 \Leftrightarrow 3p^2 = 1 \Leftrightarrow p^2 = \frac{1}{3}$

  Omdat $p > 0$ volgt hieruit $p = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Opgave 4a

- ⋆ De hoogte van de driehoek is $k(\frac{1}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi) + \cos(\frac{1}{2}\pi) = 1 + 0 = 1.$
- ⋆ $k'(x) = 2\cos 2x - 2\sin 2x$, dus $k'(\frac{1}{4}\pi) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$
- ⋆ In $y = ax + b$ kunnen we dus invullen $y = 1$, $a = -2$ en $x = \frac{1}{2}\pi$
- ⋆ Dit geeft $1 = -2 \cdot \frac{1}{4}\pi + b \Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{2}\pi$

  De vergelijking van de raaklijn is dus $y = -2x + 1 + \frac{1}{2}\pi$
- ⋆ $-2x + 1 + \frac{1}{2}\pi = 0$ geeft $x_Q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi$

  Dit is gelijk de breedte van de driehoek.
- ⋆ De oppervlakte van de driehoek is dus $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\pi$

Opgave 4b

- ⋆ $k(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\cos 2x$

  De kleinste positieve waarde van $2x$ waar dit voor geldt is $2x = \frac{3}{4}\pi$

  De bovengrens van het integratie-interval is daarom $x = \frac{3}{8}\pi$
- ⋆ $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{8}\pi} \sin 2x + \cos 2x \,\mathrm{d}x = \Big[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{3}{8}\pi}$
- ⋆ $\ldots = -\frac{1}{2}\cos(\frac{3}{4}\pi) + \frac{1}{2}\sin(\frac{3}{4}\pi) + \frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}\sin(0) = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Opgave 4c

- ⋆ De waarden van de evenwichtsstand a en de amplitude b kunnen we vinden met de extremen van k.
- ⋆ $k'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x$
  De waarden van $2x$ op het interval $[0{,}2\pi]$ waar dit voor geldt zijn $x = \frac{1}{4}\pi$ en $x = \frac{5}{4}\pi$
  Dit geeft $x = \frac{1}{8}\pi$ of $x = \frac{5}{8}\pi$.
- ⋆ $k(\frac{1}{8}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi) + \cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2};$
  $k(\frac{3}{8}\pi) = \sin(\frac{3}{4}\pi) + \cos(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
  Hieruit volgt $a = 0$ en $b = \sqrt{2}$
- ⋆ De periode van k is gelijk aan de periode van de functies waar deze uit is opgebouwd, dit geeft $c = 2$.
- ⋆ De grafiek van k is $\frac{1}{8}\pi$ naar links verschoven t.o.v. de grafiek van $\sqrt{2}\cdot\sin 2x$
  (deze heeft een maximum bij $x = \frac{1}{4}\pi$),
  dit geeft $k(x) = \sqrt{2}\cdot\left(2(x+\frac{1}{8}\pi\right)$, dus $d = 2\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{4}\pi$
  Je kunt ook uitgaan van een verschuiving van $\frac{7}{8}\pi$ naar rechts, dit geeft $d = -\frac{7}{4}\pi$.

Alternatief 1:

- ⋆ $\cos A = \sin(A + \frac{1}{2}\pi)$ geeft $k(x) = \sin 2x + \sin(2x + \frac{1}{2}\pi)$
- ⋆ Gebruik nu de formule $\sin t + \sin u = 2\sin\dfrac{t+u}{2}\cos\dfrac{t-u}{2}$
- ⋆ Dit geeft $k(x) = 2\sin\dfrac{4x+\frac{1}{2}\pi}{2}\cos\dfrac{-\frac{1}{2}\pi}{2} = 2\sin(2x+\frac{1}{4}\pi)\cdot\cos(-\frac{1}{4}\pi)$
- ⋆ Aangezien $\cos(-\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt hieruit $k(x) = \sqrt{2}\cdot\sin(2x + \frac{1}{4}\pi)$.
- ⋆ Zo zien we $a = 0$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$ en $d = \frac{1}{4}\pi$

Alternatief 2:

- ⋆ $\cos A = \sin(\frac{1}{2}\pi - A)$ geeft $k(x) = \sin 2x + \sin(\frac{1}{2}\pi - 2x)$
- ⋆ Gebruik nu de formule $\sin t + \sin u = 2\sin\dfrac{t+u}{2}\cos\dfrac{t-u}{2}$
- ⋆ Dit geeft $k(x) = 2\sin\dfrac{\frac{1}{2}\pi}{2}\cos\dfrac{4x-\frac{1}{2}\pi}{2} = 2\sin(\frac{1}{4}\pi)\cdot\cos(2x - \frac{1}{4}\pi)$
- ⋆ Aangezien $\sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\cos(2x - \frac{1}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{2}\pi - (2x - \frac{1}{4}\pi)) = \sin(\frac{3}{4}\pi - 2x)$
  volgt hieruit $k(x) = \sqrt{2}\cdot\sin(-2x + \frac{3}{4}\pi)$.
- ⋆ Zo zien we $a = 0$, $b = \sqrt{2}$, $c = -2$ en $d = \frac{3}{4}\pi$

Alternatief 3:

Je kunt ook de eerste term omzetten naar een cosinus en dan de regel voor $\cos t + \cos u$ gebruiken.

Opmerking:

Vraag a en b kunnen ook worden uitgewerkt door de het resultaat van c te gebruiken.

Opgave 5a

- ⋆ $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 + \dfrac{a-3}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + a - 3 = 0$
- ⋆ Voorwaarde voor de laatste stap is $x \neq 0$.
- ⋆ De vergelijking $x^2 - 2x + a - 3 = 0$ heeft twee verschillende oplossingen als $D = (-2)^2 - 4(a-3) > 0$.
- ⋆ Dit is als $4 - 4a + 12 > 0 \Leftrightarrow 16 - 4a > 0 \Leftrightarrow 4a < 16 \Leftrightarrow a < 4$.
- ⋆ Maar als $a = 3$ is één van de oplossingen $x = 0$, dus is er maar 1 oplossing.
  Het antwoord is dus: Voor $a < 3$ en voor $3 < a < 4$.

Opgave 5b

- ⋆ $f_a'(x) = 1 - (a-3)\cdot x^{-2} = 1 - \dfrac{a-3}{x^2}$
- ⋆ $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{3-a}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = a - 3$
- ⋆ Er zijn twee oplossingen als $a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > 3$.
- ⋆ Voor $a > 3$ geldt dus dat er toppen zijn voor $x = \sqrt{a-3}$ en voor $x = -\sqrt{a-3}$
- ⋆ $x = \sqrt{a-3}$ geeft
  $y = \sqrt{a-3} - 2 + \dfrac{a-3}{\sqrt{a-3}} = \sqrt{a-3} - 2 + \sqrt{a-3} = 2\sqrt{a-3} - 2 = 2x - 2$
  $x = -\sqrt{a-3}$ geeft
  $y = -\sqrt{a-3} - 2 + \dfrac{a-3}{-\sqrt{a-3}} = -2\sqrt{a-3} - 2 = 2x - 2$
- ⋆ Alle toppen liggen dus op de lijn $y = 2x - 2$.

Opgave 5c

- ⋆ $f_5(x) = 1 \Leftrightarrow x - 2 + \dfrac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
- ⋆ Dit geeft $(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$
- ⋆ Te berekenen is dus $\displaystyle\int_1^2 1 - \left(x - 2 + \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_1^2 3 - x - \frac{2}{x} \mathrm{d}x$
- ⋆ $\ldots = \left[3x - \frac{1}{2}x^2 - 2\ln x\right]_1^2$
- ⋆ $\ldots = (6 - 2 - 2\ln 2) - (3 - \frac{1}{2} - 0) = 1\frac{1}{2} - 2\ln 2$

Opgave 5d

- ⋆ Als p de x-coördinaat is van het meest linkse snijpunt, dan geldt
  $f_8(p) = f_8(p+4)$
- ⋆ Dit geeft $p - 2 + \dfrac{5}{p} = p + 4 - 2 + \dfrac{5}{p+4} \Leftrightarrow -2 + \dfrac{5}{p} = 2 + \dfrac{5}{p+4}$
  $\Leftrightarrow -2p(p+4) + 5(p+4) = 2p(p+4) + 5p$
- ⋆ $\ldots \Leftrightarrow -2p^2 - 8p + 5p + 20 = 2p^2 + 8p + 5p \Leftrightarrow 4p^2 + 16p - 20 = 0 \Leftrightarrow p^2 + 4p - 5 = 0$
- ⋆ $\ldots \Leftrightarrow (p+5)(p-1) = 0 \Leftrightarrow p = -5 \vee p = 1$
- ⋆ $p = -5$ geeft $q = f_8(-5) = -5 - 2 - 1 = -8$
- ⋆ $p = 1$ geeft $q = f_8(1) = 1 - 2 + 5 = 4$