CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Uitwerkingen tentamen Wiskunde A 16 januari 2015

Vraag 1a

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 5 = 0$

$D = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 196$

Twee oplossingen:

$x = \dfrac{16 + \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \dfrac{16 + 14}{6} = 5$ en $x = \dfrac{16 - 14}{6} = \dfrac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Vraag 1b

$f(1) = 1 - 8 + 5 = -2;\;\; f(6) = 216 - 288 + 30 = -42$

De richtingscoëfficiënt van de lijn door $A(1, -2)$ en $B(6, -42)$ is

$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-42 - (-2)}{6 - 1} = \dfrac{-40}{5} = -8$

In $g(x) = ax + b$ kunnen we dus invullen: $g(x) = g(1) = -2;$ $a = -8$ en $x = 1$.
Dit geeft $-2 = -8 + b \Leftrightarrow b = 6$.

Zo zien we: $g(x) = -8x + 6$.

Vraag 1c

$h(x) = b \cdot g^x$ met $h(2) = 9$ geeft $9 = b \cdot g^2$.

$h(x) = b \cdot g^x$ met $h(4) = 16$ geeft $16 = b \cdot g^4$.

Hieruit volgt:

$g^2 = \dfrac{h(4)}{h(2)} = \dfrac{16}{9}$, dus $g = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

Uit $h(2) = 9$ volgt dan verder $b \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow b = 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$.

Zo zien we $h(x) = \frac{81}{16} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x$.

Vraag 2a

De kans dat de griep na één dag niet verdwenen is, is gelijk aan 0,9.

De kans dat de griep bij alle 20 gebruikers niet verdwenen is, is dus $0{,}9^{20} \approx 0{,}1216$.

Deze kans wordt ook gegeven door binomcdf (20, 0.1, 0), door binompdf (20, 0.1, 0) en door de tabelwaarde bij $n = 20$, $p = 0{,}1$ en $x = 0$.

Vraag 2b

Deze kans is gelijk aan $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, waarbij X binomiaal verdeeld is met $n = 20$ en $p = 0{,}1$.

De tabel of binomcdf(20, 0.1, 2) geeft $P(X \leq 2) \approx 0{,}6769$, dus $P(X \geq 3) = 1 - 0{,}6769 = 0{,}3231$.

Vraag 2c

De kans dat de griep bij *alle* gebruikers uit een groep van n gebruikers *niet* verdwenen is, is $0{,}9^n$

De kans dat de griep bij *tenminste één* gebruiker uit deze groep *wel* verdwenen is, is zodoende $1 - 0{,}9^n$

Vraag 2d

Er moet gelden $1 - 0{,}9^n > 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}9^n < 0{,}05$

$0{,}9^n = 0{,}05 \Leftrightarrow n = {}^{0,9}\log 0{,}05 \approx 28{,}4$ (*Deze vergelijking mag ook met de GR worden opgelost.*)

Bij een groep van minimaal 29 gebruikers is deze kans dus groter dan 0,95.

Het antwoord $n = 29$ kan ook met "proberen" of met een tabel op de GR gevonden worden.
In dat geval moet wel vermeld worden dat $0{,}9^{28} > 0{,}05$ en $0{,}9^{29} < 0{,}05$.

Vraag 2e

$H_0 : p = 0{,}5$; $H_1 : p < 0{,}5$

Vraag 2f

Het steekproefresultaat is dat 18 van de 50 gebruikers geen griep meer hebben.
De overschrijdingskans is $P(X \leq 18)$, waarbij X binomiaal verdeeld is met $n = 50$ en $p = 0{,}5$.

binomcdf(50, .5, 18) of de tabel geven dat deze kans (afgerond) gelijk is aan 0,0325.

Deze kans is kleiner dan $\alpha = 0{,}05$, dus de nulhypothese wordt verworpen.

Vraag 3a

Noteer 1 voor een Griepweg-pil en 0 voor een pepermuntje.

$X = 3$ bij de uitkomsten 011 en 101.

De kans hierop is $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$

$X = 4$ bij de uitkomsten 0011, 0101 en 1001

De kans hierop is $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

Vraag 3b

Voor de complete kansverdeling van X moeten we nog berekenen:

$P(X = 2) = P(11) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ en $P(X = 5) = 1 - \big(P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)\big) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Ook: $P(X = 5) = P(00011) + P(00101) + P(01001) + P(10001) = 4 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times 1 = 4 \times 0{,}1 = 0{,}4$

Dit geeft $E(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}2 + 2 = 4$

Vraag 4a

G, het gemiddelde gewicht van de 50 tabletten, is normaal verdeeld met $\mu_G = 2$ en $\sigma_G = \frac{0{,}1}{\sqrt{50}}$.

$P(G < 1{,}95)$ wordt gegeven door normalcdf (-1E99, 1.95, 2, 0.1 / $\sqrt{50}$)

of door $P\left(Z < \frac{1{,}95-2}{0{,}1/\sqrt{50}}\right) \approx P(Z < -3{,}54)$

Deze kans is (afgerond) gelijk aan 0,0002.

Vraag 4b

T, het totale gewicht van een doosje met 50 tabletten, is normaal verdeeld met $\mu_T = 2 \times 50 + 10 = 110$ en $\sigma_T = \sqrt{0{,}1^2 \times 50 + 0{,}5^2} = \sqrt{0{,}75}$.

$P(T > 111)$ wordt gegeven door normalcdf (111, 1E99, 110, $\sqrt{0{,}75}$)

of door $P\left(Z > \frac{111-110}{\sqrt{0{,}75}}\right) \approx 1 - P(Z < 1{,}15)$

Deze kans is (afgerond) gelijk aan 0,1241 (met GR, bij aflezen uit de tabel is er een kleine afrondingsfout).

Vraag 5a

Minimumafstand: $12{,}5 - 4{,}5 = 8$ cm (als de cosinus gelijk is aan -1)

Maximumafstand: $12{,}5 + 4{,}5 = 17$ cm (als de cosinus gelijk is aan 1)

Vraag 5b

$y(1) = 12{,}5 + 4{,}5\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 12{,}5 + 4{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 14{,}75$

Vraag 5c

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = 6$

Op $t = 6$ is de kogel dus weer in zijn uitgangspositie en 1 seconde later is hij weer op 14,75 cm, dat is op $t = 7$.

Uit de symmetrie van de cosinusfunctie volgt echter dat de kogel ook 1 seconde voor $t = 6$ op dezelfde hoogte is, dat is op $t = 5$.

Het derde tijdstip is 6 seconden na $t = 5$, ofwel 1 seconde voor $t = 12$. Dat is op $t = 11$.

Vraag 6a

$18 \ - \ 3Q \ - \dfrac{64}{3Q+2} = 0 \ \Leftrightarrow (18-3Q)(3Q+2) - 64 = 0$

$$\Leftrightarrow 36 + 54Q - 6Q - 9Q^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow 9Q^2 - 48Q + 28 = 0$$

$D = (-48)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 28 = 1296 > 0$, dus twee oplossingen:

$Q = \dfrac{48 - \sqrt{1296}}{2 \cdot 9} = \dfrac{48-36}{18} = \tfrac{12}{18} = \tfrac{2}{3}$ en $Q = \dfrac{48 + \sqrt{1296}}{2 \cdot 9} = \dfrac{48+36}{18} = \tfrac{84}{18} = 4\tfrac{2}{3}$

Als Vis $66\frac{2}{3}$ of $466\frac{2}{3}$ kg. vlees inkoopt maakt hij geen winst, maar ook geen verlies (*break even*).
Als het aantal kg. vlees dat hij inkoopt tussen deze grenzen ligt, maakt hij winst.

Vraag 6b

$W = 18 - 3Q - 64(3Q+2)^{-1}$ geeft $\dfrac{dW}{dQ} = -3 - 64 \cdot 3 \cdot -(3Q+2)^{-2} = -3 + \dfrac{192}{(3Q+2)^2}$

$\dfrac{dW}{dQ} = 0 \ \Leftrightarrow \ \dfrac{192}{(3Q+2)^2} = 3 \Leftrightarrow 192 = 3(3Q+2)^2 \Leftrightarrow (3Q+2)^2 = 64 \Leftrightarrow 3Q + 2 = 8 \vee 3Q + 2 = -8$

$3Q + 2 = 8$ geeft $Q = 2$ en $W = 4$, de maximale winst is dus 400 euro.
$3Q - 2 = -8$ geeft een negatieve waarde voor Q, dit is hier niet mogelijk.

Vraag 6c

${}^2\log Q = 2 \cdot {}^2\log(W+4) - 5 \Leftrightarrow Q = 2^{2 \cdot {}^2\log(W+4) - 5} \Leftrightarrow Q = \dfrac{2^{\,{}^2\log(W+4)^2}}{2^5} \Leftrightarrow Q = \dfrac{(W+4)^2}{32}$

ook:

${}^2\log Q = 2 \cdot {}^2\log(W+4) - 5 = {}^2\log(W+4)^2 - {}^2\log 32 = {}^2\log \dfrac{(W+4)^2}{32} \Leftrightarrow Q = \dfrac{(W+4)^2}{32}$

Hieruit volgt:

$(W+4)^2 = 32Q \Leftrightarrow W + 4 = \sqrt{32Q} \Leftrightarrow W = \sqrt{32} \cdot Q^{\frac{1}{2}} - 4$, ofwel $W = 4\sqrt{2} \cdot Q^{\frac{1}{2}} - 4$
$W + 4 = -\sqrt{32Q}$ *mag niet worden ingevuld in de oorspronkelijke formule.*

Vraag 7a

$d = 100$ geeft $v = 34 \cdot \sqrt{\frac{100}{9}} = 34 \cdot \frac{10}{3} = \frac{340}{3}$ km/uur $= \frac{340}{3} \times \frac{1000}{3600} = \frac{340000}{10800} \approx 31{,}5$ meter/seconde

Vraag 7b

$170 = 34\sqrt{\frac{d}{9}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{d}{9}} = 5 \Leftrightarrow \frac{d}{9} = 25 \Leftrightarrow d = 225$ meter.

Vraag 7c

$h = \frac{4}{3} \cdot d^{-\frac{1}{4}}$ geeft $h' = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot d^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{3} \cdot d^{-\frac{5}{4}}$,

dus $d = 16$ geeft $h' = -\frac{1}{3} \cdot 16^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{3} \cdot 2^{-5} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{32} = -\frac{1}{96}$

Vraag 7d

Invullen van $d = 81x^2$ in de formule voor *h* geeft:

$$h = \frac{4}{3 \cdot \sqrt[4]{81x^2}} = \frac{4}{3 \cdot \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{x^2}} = \frac{4}{3 \cdot 3 \cdot x^{\frac{2}{4}}} = \frac{4}{9x^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{9\sqrt{x}}$$