CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 16 januari 2015
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 7

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of, indien toegestaan, een toelichting op het gebruik van de grafische rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen tipp-ex o.i.d.. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een (grafische) rekenmachine van een type dat goedgekeurd is voor het Centraal Examen Wiskunde van het vwo. Overige hulpmiddelen, zoals formulekaart, BINAS en tabellenboek zijn NIET toegestaan. Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt. Tabellen voor de binomiale en de normale kansverdeling zijn verkrijgbaar bij de surveillanten.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden.

Op www.ccvx.nl vindt u vanaf begin volgende week:

- de uitwerkingen van dit tentamen;
- de stand van zaken van de correctie van dit tentamen.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6	7
a	4	3	5	4	2	6	4
b	4	3	6	5	2	6	4
c	4	2			4	4	5
d		3					4
e		1					
f		5					
Totaal	12	17	11	9	8	16	17

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Drie functies

Gegeven de functie $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x$.

4pt a Bereken algebraïsch de *x*-coördinaten van de punten op de grafiek van *f* waar de raaklijn aan die grafiek horizontaal loopt.

A is het punt op de grafiek van *f* met $x_A = 1$. *B* is het punt op de grafiek van *f* met $x_B = 6$.
g is de eerstegraads functie waarvan de grafiek door de punten *A* en *B* gaat.

4pt b Geef een formule voor de functie g.

De grafiek van de exponentiële groeifunctie *h* gaat door de punten (2,9) en (4,16).

4pt c Geef een formule voor de functie *h*.

Opgave 2 – Griep weg?

Het farmaceutisch bedrijf Pilfit brengt een nieuwe pil op de markt onder de naam Griepweg.
Het bedrijf claimt dat bij 10% van de gebruikers de griep na één dag verdwenen is.
Ga er bij de beantwoording van vraag a, b, c en d van uit dat deze claim waar is.
Geef de antwoorden van vraag a en b afgerond op vier decimalen.

20 grieppatiënten gebruiken de Griepweg pil.

3pt a Bereken de kans dat bij geen enkele van deze 20 gebruikers de griep na één dag verdwenen is.

3pt b Bereken de kans dat bij minstens drie van deze 20 gebruikers de griep na één dag verdwenen is.

Pilfit wil een groep willekeurig gekozen gebruikers van Griepweg volgen om het effect van deze pil te onderzoeken. Daarbij wil Pilfit dat de kans dat er tenminste één patiënt uit deze groep is waarbij de griep na één dag verdwenen is, groter is dan 95%.

2pt c Laat zien dat deze kans voor een groep van *n* gebruikers gelijk is aan $1 - 0{,}9^n$.

3pt d Hoe groot moet de groep gebruikers minimaal zijn om te bereiken dat deze kans groter is dan 95%?

Pilfit zegt in een reclamefolder dat bij 50% van de gebruikers van Griepweg de griep binnen twee dagen verdwenen is. De Gezondheidsraad heeft haar twijfels. Zij verwacht dat de griep bij minder dan 50% van de gebruikers verdwenen is en besluit dit te toetsen.

1pt e Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toets.

Vijftig mensen met griep worden behandeld met Griepweg. 32 van hen hebben na twee dagen nog steeds griep.

5pt f Wordt de nulhypothese verworpen bij een significantieniveau van $\alpha = 0{,}05$?

Opgave 3 – Pillen weg?

Een nieuwe medewerker van Pilfit stopt per ongeluk twee Griepweg pillen in een doosje waarin al drie pepermuntjes zitten, die heel erg veel op de pillen lijken. Hij wil zijn fout uiteraard zo snel mogelijk herstellen en daarom pakt hij blindelings en zonder terugleggen objecten (dat wil zeggen pillen of pepermuntjes) uit het doosje, net zo lang totdat hij de twee pillen terug heeft.
Het aantal objecten dat hij pakt totdat hij de twee pillen terug heeft, is een toevalsvariabele X.

5pt a Laat zien dat $P(X = 3) = 0{,}2$ en $P(X = 4) = 0{,}3$.

6pt b Bereken $E(X)$.

Opgave 4 – Pijn weg!

Pilfit produceert ook pijnstillertabletten. Deze tabletten worden machinaal geproduceerd en de gewichten zijn normaal verdeeld, met een gemiddelde van 2,0 gram en een standaardafwijking van 0,1 gram.
De tabletten gaan per 50 in een doosje. De gewichten van de doosjes zijn ook normaal verdeeld, met een gemiddelde van 10 gram en een standaardafwijking van 0,5 gram. De 50 tabletten in een doosje worden willekeurig gekozen.
Geef de antwoorden van vraag a en b afgerond op vier decimalen.

4pt a Bereken de kans dat het gemiddelde gewicht van 50 willekeurig gekozen pijnstillertabletten lager is dan 1,95 gram.

5pt b Bereken de kans dat het totale gewicht (inclusief het doosje) van een doosje met 50 tabletten hoger is dan 111 gram.

Opgave 5 – Op en neer

Een kogel is door middel van een veer opgehangen aan het plafond. Aanvankelijk is de kogel in rust. Op een zeker moment wordt de kogel een stukje omlaag getrokken en vervolgens losgelaten. Hierdoor gaat de kogel op en neer bewegen. Een student bestudeert de beweging van de kogel. Uit nauwkeurige metingen blijkt dat de afstand van het middelpunt van de kogel en het plafond wordt weergegeven door de formule

$$y(t) = 12{,}5 + 4{,}5\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi t\right).$$

In deze formule is t de tijd in seconden en y de afstand tot het plafond in centimeters.

2pt a Wat is de minimale en de maximale afstand van het middelpunt van de kogel tot het plafond gedurende de beweging?

2pt b Bereken de afstand van het middelpunt van de kogel tot het plafond op $t = 1$.

4pt c Gebruik de periode van $y(t)$ om de eerste drie tijdstippen na $t = 1$ te bepalen waarop de kogel op dezelfde hoogte is als op $t = 1$.

Opgave 6 – Vlees van Vis, da's niet mis!

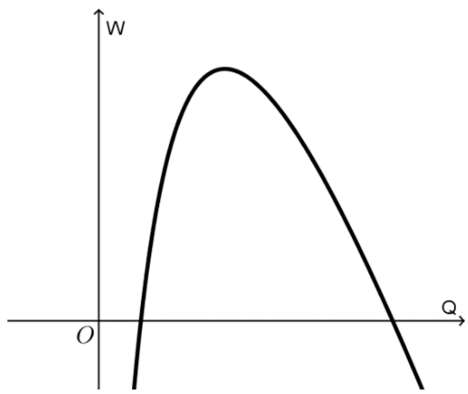
Marktkoopman Vis staat iedere dag met eersteklas vlees op de markt. Zijn broer, een bekend econoom, heeft de omzetgegevens van marktkoopman Vis bestudeerd en hij heeft daarbij twee modellen opgesteld voor het verband tussen de winst die Vis op een dag maakt en de hoeveelheid vlees die hij voor die dag inkoopt.

Bij het eerste model hoort de formule

$$W = 18 - 3Q - \frac{64}{3Q+2}$$

Hierin is W de winst in honderden euro's en is Q de ingekochte hoeveelheid vlees in honderden kilo's.

In de figuur hiernaast ziet u een schets van de grafiek van W als functie van Q.



6pt a Bereken algebraïsch de waarden van Q waarvoor geldt $W = 0$.
Wat is de economische betekenis van deze waarden van Q?

6pt b Bereken algebraïsch de maximale winst die Vis op een dag kan maken.

Het tweede model geeft het volgende verband tussen W en Q:

$$^{2}\log Q = 2 \cdot {}^{2}\log(W+4) - 5$$

4pt c Werk deze formule algebraïsch om tot de vorm $W = a \cdot Q^n + b$.

Opgave 7 - Tsunami

Een tsunami is een vloedgolf die wordt veroorzaakt door een aardbeving onder de zee, ook wel een zeebeving genoemd. Voor de snelheid waarmee een tsunami zich verplaatst geldt bij benadering de formule

$$v = 34\sqrt{\frac{d}{9}}$$

In deze formule is *v* de snelheid in km/uur en is *d* de waterdiepte in meter.

4pt a Bereken de snelheid van de tsunami in meters per seconde als de waterdiepte 100 meter is.

4pt b Bereken algebraïsch de waterdiepte als de snelheid van de tsunami 170 km/uur is.

Er is ook een verband tussen de hoogte *h* van een tsunamigolf en de waterdiepte *d*.
Dit verband wordt gegeven door de formule

$$h = \frac{4}{3 \cdot \sqrt[4]{d}}$$

met *h* en *d* in meters.

De afgeleide van *h* als functie van *d* geeft de snelheid (in hoogtemeter per dieptemeter) waarmee de hoogte van de tsunamigolf verandert als de waterdiepte verandert.

5pt c Bereken deze snelheid algebraïsch voor het geval de waterdiepte 16 meter is.

Langs een zekere kuststrook wordt de waterdiepte gegeven door de formule

$$d = 81x^2$$

met *d* de waterdiepte in meters en *x* de afstand tot de kust in km.

4pt d Geef een formule die *h*, de hoogte van de tsunamigolf in meters, geeft als functie van *x*, de afstand tot de kust in km. Vereenvoudig deze formule zo ver mogelijk.

Lijst van formules voor het voortentamen wiskunde A

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\dots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
Productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx}=\dfrac{df}{dg}\cdot\dfrac{dg}{dx}$

Meer formules op de volgende pagina.

Lijst van formules voor het voortentamen wiskunde A (vervolg)

Logaritmen

Regel	**voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \frac{a}{b}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0$
${}^{g}\log a = \frac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ p > 0,\ \ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \qquad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Einde van het tentamen.

Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Tabellen voor de binomiale en de normale kansverdeling zijn verkrijgbaar bij de surveillanten.

