CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum:	16 januari 2014
Tijd:	14.00 - 17.00 uur
Aantal opgaven:	7

Zet uw naam op alle in te leveren blaadjes.

Laat bij elke opgave door middel van een redenering, een berekening of een toelichting op het gebruik van de grafische rekenmachine zien hoe het antwoord verkregen is. Als deze ontbreekt worden voor het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen tipp-ex o.i.d.. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een (grafische) rekenmachine van een type dat goedgekeurd is voor het Centraal Examen Wiskunde van het vwo. Overige hulpmiddelen, zoals formulekaart, BINAS en tabellenboek zijn NIET toegestaan. Op pagina 4 is een lijst van formules afgedrukt; op de laatste drie pagina's (*zie eerdere tentamens*) vindt u tabellen van de binomiale en de normale kansverdeling.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden.

Op www.ccvx.nl vindt u vanaf eind volgende week:

- de uitwerkingen van dit tentamen;
- de stand van zaken van de correctie van het tentamen.

U wordt dringend verzocht om de Open Universiteit niet te bellen of te mailen over uw uitslag. Deze wordt zo spoedig mogelijk naar u opgestuurd.

Te behalen punten per onderdeel:							
Opgave	1	2	3	4	5	6	7
a	4	4	5	2	3	2	6
b	4	4	6	5	3	5	6
c		2		3	6	2	7
d				2			
e				5			
f				4			
Totaal	8	10	11	21	12	9	19

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

1 Van een rekenkundige rij is gegeven: $u_3 = 15$ en $u_{30} = 123$.

4 pt **a** Komt het getal 69 voor in deze rij?
Zo ja, wat is dan het nummer van deze term? Zo nee leg uit waarom niet.

Van een meetkundige rij is gegeven $u_1 = 1024$ en $u_4 = 3456$.

4 pt **b** Komt het getal 59049 voor in deze rij?
Zo ja, wat is dan het nummer van deze term? Zo nee leg uit waarom niet.

2 De totale productiekosten K van een zeker goed in een jaar worden gegeven door de formule

$$K = 27.000 \cdot P^{\frac{2}{3}}$$

(K in euro's, P de jaarproductie in tonnen)

In bepaald jaar bedragen de totale kosten 432.000 euro.

4 pt **a** Bereken de jaarproductie algebraïsch.

De afgeleide van K noemen we de marginale kosten (K').

4 pt **b** Geef een formule voor de marginale kosten en schrijf het antwoord zonder negatieve of gebroken exponenten.

2 pt **c** Bereken met behulp van de afgeleide de marginale kosten bij een jaarproductie van 216 ton.

3 Een raam is gemaakt van een glassoort met de eigenschap dat een glazen plaat van 10 mm dikte 13% van het invallende licht absorbeert. De dikte van het glas in het raam bedraagt 24 mm.

5 pt **a** Bereken hoeveel procent van het invallende licht door het raam wordt geabsorbeerd.

Bij het ontwerpen van een gebouw is het van belang om te weten hoe dik het glas in een raam moet zijn om een zekere doorlaatbaarheid te bereiken. Daartoe wil men een formule hebben die de dikte van het glas berekent als functie van het gewenste percentage van het licht dat doorgelaten wordt.

6 pt **b** Geef een formule voor de functie die de dikte van de ruit in mm geeft als functie van het percentage licht dat doorgelaten wordt en bereken met behulp van deze formule hoe dik het glas in het raam is als 40% van het licht wordt geabsorbeerd.

4 In de voetbalcompetitie spelen 18 clubs. Iedere club speelt een thuis- en een uitwedstrijd tegen elke andere club. Een vader wedt met zijn zoon dat zijn favoriete voetbalclub, Ajanoord, in de 17 thuiswedstrijden van de competitie meer doelpunten scoort dan in de 17 uitwedstrijden. Ze besluiten de thuis- en uitwedstrijd tegen dezelfde tegenstander onderling met elkaar te vergelijken. Bijvoorbeeld won Ajanoord thuis van SVP met 3 – 1 en uit won Ajanoord van SVP met 1 – 0. Een dergelijke vergelijking, als Ajanoord thuis meer scoort dan uit, levert een plus op. Als Ajanoord thuis tegen een tegenstander minder scoort dan uit, levert dan een min op. Worden er evenveel doelpunten thuis als uit gescoord, dan levert de vergelijking een 0 op. In de 34 wedstrijden van het seizoen waarover de weddenschap gaat scoorde Ajanoord 8 plusjes, 2 maal een min en 7 maal een 0.

2 pt **a** Welke nulhypothese zullen vader en zoon toetsen? Hoe luidt het alternatief?

5 pt **b** Wat is de conclusie van de tekentoets als $\alpha = 0{,}05$?

De totale duur van een voetbalwedstrijd, inclusief blessuretijd, is dit jaar normaal verdeeld met gemiddelde van 93 minuten en een standaardafwijking van 1 minuut.

3 pt **c** Hoe groot is de kans dat een willekeurige thuiswedstrijd van Ajanoord tussen de 92,5 en 94 minuten duurde?

2 pt **d** Hoe groot is de kans dat de thuiswedstrijd tegen SVP langer duurde dan de uitwedstrijd tegen SVP?

Het Sportkanaal wil vier wedstrijden van een zekere speeldag integraal (d.w.z. in zijn geheel) uitzenden.

5 pt **e** Bereken de kans dat deze wedstrijden in totaal korter dan 6 uur en 7 minuten duren.

Vorig jaar was de gemiddelde duur van een wedstrijd ook 93 minuten en duurde 34% van de wedstrijden langer dan 93,5 minuten. De duur van een voetbalwedstrijd was net als dit jaar normaal verdeeld.

4 pt **f** Bereken voor vorig jaar de standaardafwijking van de duur van een voetbalwedstrijd. Rond het antwoord af op één cijfer achter de decimale komma.

5 In de Volkskrant stond op 1 november 2013 het volgende bericht:

De 67 jarige James Bozeman uit Florida won voor de tweede maal de jackpot in de lotto. Hij koos beide keren willekeurig zes getallen. De kans om één keer de lotto te winnen is volgens deskundigen ongeveer 1 op 14 miljoen. De kans om de tweede keer opnieuw de hoofdprijs te winnen is 1 op 195 biljoen.

We nemen aan dat in Florida de lotto wordt gespeeld met 49 ballen waarvan er zes aselect getrokken worden. Je vult op een formulieren zes getallen uit de getallen 1 t/m 49 in, en als jouw zes getallen allemaal getrokken worden, win je de jackpot.

3 pt **a** Ga met een berekening na of de kans om de jackpot te winnen inderdaad ongeveer 1 op de 14 miljoen is.

3 pt **b** Wat vind je van de laatste zin uit de Volkskrant? Ben je het eens met deze bewering? Motiveer je antwoord.

In de lotto van Miniland worden 4 getallen getrokken uit de getallen 1 t/m 25. De speler kiest zijn eigen lot door zelf 4 getallen te kiezen uit de getallen 1 t/m 25. Hij wint een prijs als hij twee of meer getallen goed voorspeld heeft.

6 pt **c** Bereken de kans dat een speler die met één lot meespeelt, geen prijs wint.

6 In een haven in een getijdengebied wordt de waterstand op een zekere dag gegeven door de formule

$$H = 350 + 180\sin(0{,}5(t - 6{,}3))$$

Hierin is H de hoogte in cm (vanaf de bodem) en t de tijd in uren gerekend vanaf middernacht.

2 pt **a** Bereken algebraïsch de minimale en de maximale waterstand in cm.

5 pt **b** Bereken algebraïsch op welke tijdstippen op de betreffende dag de waterstand minimaal is. Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.

2 pt **c** Bepaal de periode van de functie H in minuten nauwkeurig.

7 Gegeven de functies $f(x) = \dfrac{10x}{5 + x^2}$, $g(x) = 3 + \sqrt{3 - x}$ en $h(x) = 3 + 2x$.

6 pt **a** Bereken de minimale en de maximale waarde van de functie f algebraïsch.

6 pt **b** Los algebraïsch op: $g(x) = h(x)$.

A is het punt op de grafiek van g waarvoor geldt $x_A = 2$.

7 pt **c** Bepaal met behulp van de afgeleide een vergelijking voor de raaklijn aan de grafiek van g in punt A.

Lijst van formules voor het voortentamen Wiskunde A

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen X en Y geldt: $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$
$\sqrt{n}$-wet: Bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X: $\mathrm{E}(S) = n \cdot \mathrm{E}(X)$ $\quad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$ $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X)$ $\quad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{met } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Verwachting: $\mathrm{E}(X) = n \cdot p$ $\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \dfrac{g-\mu}{\sigma}\right)$

Differentiëren

naam van de regel	**functie**	**afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	**voorwaarden**
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^g\log a = \dfrac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Rijen

Rekenkundige rij:	Som $= \frac{1}{2} \cdot$ aantal termen $\cdot\ (u_e + u_l)$
Meetkundige rij:	Som $= \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1}$ $\ (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	e = rangnummer eerste term; l = rangnummer laatste term.

Opgave 1a

- ⋆ Noem het verschil van twee opeenvolgende termen v.
  Dan geldt: $u_{30} = u_3 + 27v \Leftrightarrow 27v = u_{30} - u_3$
- ⋆ Hieruit volgt $27v = 123 - 15 = 108 \Leftrightarrow v = 4$
- ⋆ Als 69 in de rij voorkomt, dan wordt het nummer n van deze term gegeven door
  $u_3 + (n-3)v = 69$.
  Dit geeft $15 + 4(n-3) = 69 \Leftrightarrow 4n = 66$.
- ⋆ Omdat er geen natuurlijk getal is waarvoor geldt $4n = 66$, kan het getal 69 niet in deze rij voorkomen.

Opgave 1b

- ⋆ Als r de reden is van deze meetkundige rij, dan geldt $u_4 = u_1 \cdot r^3$.
- ⋆ Hieruit volgt $r^3 = \dfrac{u_4}{u_1} = \dfrac{3456}{1024} = 3{,}375 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{3{,}375} = 1{,}5$
- ⋆ Als 59049 in de rij voorkomt, dan wordt het nummer n van deze term gegeven door
  $u_1 \cdot r^{n-1} = 59049$.
  Dit geeft $1{,}5^{n-1} = \dfrac{59049}{1024} \Leftrightarrow n - 1 = {}^{1{,}5}\log \dfrac{59049}{1024}$.
- ⋆ Hieruit volgt $n - 1 = 10 \Leftrightarrow n = 11$.

Opgave 2a

- ⋆ $K = 432.000 \Leftrightarrow 27.000 \cdot P^{\frac{2}{3}} = 432.000 \Leftrightarrow P^{\frac{2}{3}} = \dfrac{432.000}{27.000}$
- ⋆ Dit geeft $P^{\frac{2}{3}} = 16 \Leftrightarrow P = 16^{\frac{3}{2}}$
- ⋆ Daaruit volgt $P = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$

Opgave 2b

- ⋆ $K' = 27.000 \cdot \frac{2}{3} \cdot P^{-\frac{1}{3}} = 18.000 \cdot \dfrac{1}{P^{1/3}} = 18.000 \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{P}} = \dfrac{18.000}{\sqrt[3]{P}}$

Opgave 2c

- ⋆ $\sqrt[3]{216} = 6$
- ⋆ $P = 216$ geeft dus $K' = \dfrac{18.000}{\sqrt[3]{216}} = \dfrac{18.000}{6} = 3000$.

Opgave 3a

- ⋆ Per 10 mm wordt 87% van het licht doorgelaten, de groeifactor van het doorgelaten licht is dus 0,87 per 10 mm.
- ⋆ Het percentage doorgelaten licht in 24 mm wordt dan gegeven door
  $P = 100 \cdot 0{,}87^{24/10}$.
  Mag direct opgeschreven worden, kan ook met de formule $P = 100 \cdot g^{24}$
  met $g = 0{,}87^{1/10}$ *= de groeifactor per mm.*
- ⋆ De rekenmachine geeft nu $P \approx 71{,}59$, dus 71,59% van het licht wordt doorgelaten.
- ⋆ Dit betekent dat 28,41% van het licht wordt geabsorbeerd.

Opgave 3b

- ⋆ De groeifactor van het percentage licht dat doorgelaten wordt is $0{,}87^{1/10}$ per mm.
- ⋆ Het percentage licht dat doorgelaten wordt als functie van de dikte in mm d wordt dus gegeven door $P = 100 \cdot 0{,}87^{d/10}$.
- ⋆ Dit geeft $0{,}87^{d/10} = \dfrac{P}{100} \Leftrightarrow \dfrac{d}{10} = {}^{0{,}87}\log \dfrac{P}{100} \Leftrightarrow d = 10 \cdot {}^{0{,}87}\log \dfrac{P}{100}$.
- ⋆ Als 40% van het licht wordt geabsorbeerd, wordt 60% doorgelaten, dus moeten we $P = 60$ invullen in deze formule.
- ⋆ Dit geeft $d = 10 \cdot {}^{0{,}87}\log \dfrac{60}{100} = 10 \cdot {}^{0{,}87}\log 0{,}6$.
- ⋆ De rekenmachine geeft dan $d \approx 36{,}68$ mm.

Opgave 4a

- ⋆ Bij deze tekentoets toetsen we of p, de proportie plusjes groter is dan de proportie minnen, waarbij we de nullen negeren.
- ⋆ Dit geeft $H_0 : p = 0{,}5$ en $H_1 : p > 0{,}5$

Tweede mogelijkheid:

- ⋆ We kunnen ook toetsen of q, de proportie minnen, kleiner is dan de proportie plussen.
- ⋆ Dit geeft $H_0 : q = 0{,}5$ en $H_1 : q < 0{,}5$

Opgave 4b

- ⋆ De overschrijdingskans wordt gegeven door $\mathrm{P}(X \geq 8)$, waarbij X binomiaal verdeeld is met $n = 10$ en $p = 0{,}5$ of door $\mathrm{P}(X \leq 2)$, met X binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $q = 0{,}5$.
- ⋆ Deze kans is gelijk aan $1 - \mathrm{P}(X \leq 7) = 1 - 0{,}9453 = 0{,}0547$.
  Bij de tweede mogelijkheid volgt direct $\mathrm{P}(X \leq 2) = 0{,}0547$.
- ⋆ Omdat de overschrijdingskans groter is dan α, wordt de nulhypothese niet verworpen.
- ⋆ Er is dus niet genoeg reden om aan te nemen dat er ”thuis” meer doelpunten gemaakt worden dan “uit”.

Opgave 4c

- ⋆ Deze kans wordt gegeven door normalcdf(92.5 , 94, 93, 1)
  of door $\mathrm{P}(92{,}5 < Y < 94) = \mathrm{P}(-0{,}5 < Z < 1) = \mathrm{P}(Z < 1) - \mathrm{P}(Z < -0{,}5)$, waarbij Z standaard-normaal verdeeld is.
- ⋆ Deze kans is gelijk aan $0{,}5328$ $(= 0{,}8413 - 0{,}3085)$

Opgave 4d

- ⋆ Het berekenen van deze kans valt buiten te tentamenstof, maar omdat de duur van beide wedstrijden een gelijke verdeling heeft en het theoretisch niet mogelijk is dat ze precies even lang duren, moet deze kans wel gelijk zijn aan 0,5.

Opgave 4e

- ⋆ De totale duur van deze vier wedstrijden is normaal verdeeld met een gemiddelde van $4 \times 93 = 372$ minuten.
- ⋆ De standaarddeviatie is $\sqrt{4} \times 1 = 2$ minuten.
- ⋆ 6 uur en 7 minuten is 367 minuten, gevraagd wordt dus $\mathrm{P}(X < 367)$
- ⋆ Deze kans wordt gegeven door normalcdf(–1E99 , 367, 372, 2)
  of door $\mathrm{P}(Z < -\frac{5}{2})$.
- ⋆ Deze kans is gelijk aan 0,0062.

Opgave 4f

- ⋆ Als 34% langer duurt dan 93,5 minuten, duurt 66% korter dan 93,5 minuten.
- ⋆ invNorm(0,66) ≈ 0,4125
  of teruglezen in de tabel: $\mathrm{P}(Z < 0{,}41) = 0{,}66$
- ⋆ $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ geeft dan $\sigma = \dfrac{X - \mu}{Z} = \dfrac{93{,}5 - 93}{0{,}4125}$
  of $\sigma = \dfrac{93{,}5 - 93}{0{,}41}$
- ⋆ Dit geeft $\sigma \approx 1{,}2$

Opgave 5a

- ⋆ Er worden 6 getallen gekozen uit de getallen 1 t/m 49. Dit kan op $\binom{49}{6}$ manieren.
- ⋆ De rekenmachine geeft $\binom{49}{6} = 13.983.816$, er zijn dus 13.983.816 mogelijke uitslagen van de lottotrekking.
- ⋆ James wint de hoofdprijs als de uitslag precies gelijk is aan de getallen die hij heeft gekozen.
  De kans hierop is 1 op 13.983.816.

Opgave 5b

- ⋆ Dit is onjuist. Het zijn onafhankelijke gebeurtenissen, de kans om de tweede keer weer te winnen is net zo groot als de eerste keer. Bedoeld wordt waarschijnlijk de kans om twee maal achter elkaar te winnen.

Opgave 5c

- ⋆ De kans dat de speler geen getal goed heeft is $\dfrac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}$
- ⋆ De kans dat de speler alleen het eerste getal dat getrokken wordt, goed heeft, maar de andere getallen niet, is $\dfrac{4\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}$
- ⋆ De speler heeft ook één getal goed als hij alleen het tweede, het derde of het vierde getrokken getal goed heeft.
- ⋆ De kans hierop is telkens gelijk aan de kans dat hij alleen het eerste getal goed heeft.
- ⋆ De kans op geen prijs is dus gelijk aan $\dfrac{21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22} + 4\times\dfrac{4\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}$
- ⋆ Dit is afgerond gelijk aan $0{,}8937$.

Alternatief:

- ⋆ De kans op 0 goed is $\dfrac{\binom{21}{4}}{\binom{25}{4}}$
- ⋆ De kans op 1 goed is $\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{21}{3}}{\binom{25}{4}}$
- ⋆ De kans op geen prijs is dus $\dfrac{\binom{21}{4}+\binom{4}{1}\cdot\binom{21}{3}}{\binom{25}{4}} \approx 0{,}8937$.

Opgave 6a

- ⋆ H is minimaal als $\sin(0{,}5(t-6{,}3)) = -1$;
  H is maximaal als $\sin(0{,}5(t-6{,}3)) = 1$.
- ⋆ De minimale waterstand is dus $350 - 180 = 170$ cm en de maximale waterstand is $350 + 180 = 530$ cm.

Opgave 6b

- ⋆ H is minimaal als $\sin(0{,}5(t-6{,}3)) = -1$.
- ⋆ Dit geeft onder meer $0{,}5(t-6{,}3) = -\frac{1}{2}\pi$.
- ⋆ Hieruit volgt $t - 6{,}3 = -\pi \Leftrightarrow t = 6{,}3 - \pi \approx 3{,}1584$ uur.
- ⋆ $0{,}1584\cdot 60 = 9{,}504$. Het eerste tijdstip is dus afgerond 3 uur en 10 minuten na middernacht.
- ⋆ H is ook minimaal als $0{,}5(t-6{,}3) = 1\frac{1}{2}\pi$
- ⋆ Hieruit volgt $t - 6{,}3 = 3\pi \Leftrightarrow t = 6{,}3 + 3\pi \approx 15{,}7248$ uur.
  $0{,}7248\cdot 60 = 43{,}488$. Het tweede tijdstip is dus afgerond 15 uur en 43 minuten na middernacht.

Alternatief met gebruik van de tweede uitwerking bij vraag c:

- ⋆ Berekening van één van de tijdstippen als boven.
- ⋆ Het tweede tijdstip is één periode na het eerste tijdstip.
- ⋆ Berekening tweede tijdstip door de periode op te tellen bij (of af te trekken van) het eerste antwoord.

Opgave 6c

Met behulp van de eerste uitwerking van vraag b:

- ⋆ De periode is gelijk aan de tijd tussen de twee bij b gevonden tijdstippen.
- ⋆ Het verschil van de afgeronde tijdstippen is 12 uur en 33 minuten,
  als we eerst het verschil berekenen en dan pas afronden, wordt het antwoord 12 uur en 34 minuten.

Met een directe berekening:

- ⋆ De periode van een functie van de vorm $f(t) = a\sin(b(t-c)) + d$ is $\dfrac{2\pi}{b}$.
- ⋆ In dit geval is de periode dus $\dfrac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \approx 12{,}5664$ uur.
- ⋆ $0{,}5664 \times 60 = 33{,}984$. De periode is dus afgerond 12 uur en 34 minuten.

Opgave 7a

- ⋆ $f'(x) = \dfrac{[10x]' \cdot (5+x^2) - 10x \cdot \left[5+x^2\right]'}{(5+x^2)^2}$
  $= \dfrac{10 \cdot (5+x^2) - 10x \cdot 2x}{(5+x^2)^2} = \dfrac{50-10x^2}{(5+x^2)^2}$
- ⋆ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - 10x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$
- ⋆ $f(\sqrt{5}) = \dfrac{10 \cdot \sqrt{5}}{5+5} = \sqrt{5}$
- ⋆ $f(-\sqrt{5}) = \dfrac{10 \cdot -\sqrt{5}}{5+5} = -\sqrt{5}$

Opgave 7b

- ⋆ $g(x) = h(x) \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 2x$
- ⋆ Links en rechts kwadrateren geeft $3 - x = 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 3 = 0$
- ⋆ De *abc*-formule met $a = 4$, $b = 1$ en $c = -3$ geeft
  $D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 1 + 48 = 49$.
- ⋆ Oplossingen: $x = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-1+7}{8} = \frac{3}{4}$
  en $x = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-1-7}{8} = -1$
- ⋆ $g(\frac{3}{4}) = 3 + \sqrt{2\frac{1}{4}} = 3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$; $h(\frac{3}{4}) = 3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$
  $g(-1) = 3 + \sqrt{4} = 5$; $h(-1) = 3 - 2 = 1$
  Alleen de oplossing $x = \frac{3}{4}$ voldoet.

Opgave 7c

- ⋆ $g(x)$ is een kettingfunctie $k(u(x))$ met $u(x) = 3 - x$ en $k(u) = 3 + \sqrt{u}$
- ⋆ $k(u) = 3 + u^{1/2}$, dus $k'(u) = \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2} = \dfrac{1}{2u^{1/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

  Mag ook direct worden opgeschreven.
- ⋆ Dit geeft $g'(x) = k'(u) \cdot u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot -1 = \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}$.
- ⋆ $x_A = 2$ geeft $y_A = g(2) = 3 + \sqrt{3-2} = 3 + 1 = 4$ en $a = g'(2) = \dfrac{-1}{2\sqrt{3-2}} = -\frac{1}{2}$.

  We zoeken dus de rechte lijn door punt (2,4) met r.c. $a = -\frac{1}{2}$.
- ⋆ De formule $y = ax + b$ geeft dan $4 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 4 + 1 = 5$.
- ⋆ De vergelijking van de raaklijn is zodoende $y = -\frac{1}{2}x + 5$.