

# CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

## Programma voortentamen Wiskunde A

Ingaande december 2018

Het voortentamen wiskunde A wordt afgenomen als een schriftelijk tentamen met open vragen. De tentamentijd is 3 uur. Informatie over de tentamendata en over de inschrijving voor deze tentamens vindt u op [www.ccvx.nl](http://www.ccvx.nl).

Het programma van het voortentamen wiskunde A van de CCVW is gebaseerd op het eindexamenprogramma wiskunde A van het vwo voor 2019 zoals gepubliceerd op [www.examenblad.nl](http://www.examenblad.nl). Ten opzichte van het Centraal Examen van het vwo zijn er twee belangrijke verschillen:

1. **Bij het voortentamen wiskunde A mag er geen gebruik gemaakt worden van een grafische rekenmachine** of overige ICT.
2. **Het domein Statistiek en Kansrekening wordt op het voortentamen wiskunde A ook getoetst.** Op het vwo wordt dit domein alleen in het schoolexamen getoetst.

De nadere vaststelling van het examenprogramma op [www.examenblad.nl](http://www.examenblad.nl) is daarom niet van toepassing.

In dit document vindt u

- Het tentamenprogramma
- Tentamenbenodigdheden
- De formulelijst die op het tentamen wordt afgedrukt
- Uitwerking van het tentamenprogramma in een lijst van begrippen, eigenschappen en vaardigheden
- Overzicht van algebraïsche vaardigheden
- Aanbevolen leermateriaal

Bij het voortentamen dienen alle berekeningen algebraïsch uitgevoerd te worden, het gebruik van een **grafische rekenmachine** of een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen is daarom **niet toegestaan**. Wel toegestaan is het gebruik van een standaard rekenmachine met exponentiële, logaritmische en goniometrische functies van een type vergelijkbaar met de Casio fx 82 serie en de TI 30 serie

## Tentamenprogramma wiskunde A

- 1 De kandidaat kan probleemsituaties die zich daartoe lenen in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.
- 2 De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende wiskundige vaardigheden, waaronder modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren, en logisch redeneren.
- 3 De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen, daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen en van het werken met haakjes.
- 4 De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies, logaritmische functies en sinusfuncties de kenmerken in grafiek, tabel en formule herkennen en gebruiken.
- 5 De kandidaat kan van combinaties en samenstellingen van de bij 4 genoemde types functies formules en functievoorschriften opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met algebraïsche methoden, dus zonder gebruik van een grafische rekenmachine, en de uitkomst interpreteren in termen van een context.
- 6 De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de afgeleide bepalen, de rekenregels voor het differentiëren gebruiken en aan de hand van de afgeleide het veranderingsgedrag van een functie beschrijven. Het gebruik van de kettingregel wordt daarbij beperkt tot functies van de vorm  $k(x) = f(g(x))$  waarin  $f$  en  $g$  enkelvoudige functies van de in de vorige zin genoemde typen zijn.
- 7 De kandidaat kan met behulp van de afgeleide functie de plaats van de minima en de maxima van een grafiek berekenen door de daarbij behorende vergelijkingen algebraïsch op te lossen en kan met behulp van een schets van de grafiek de aard van deze extremen bepalen.
- 8 De kandidaat kan het gedrag van een rij herkennen en beschrijven en berekeningen aan een rij uitvoeren, in het bijzonder voor rekenkundige en meetkundige rijen.
- 9 De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen.
- 10 De kandidaat kan de modus en de mediaan van een serie losse waarnemingsgetallen bepalen en kan met behulp van een eenvoudige rekenmachine het gemiddelde en de standaardafwijking van een populatie van beperkte omvang berekenen.
- 11 De kandidaat kan het kansbegrip gebruiken om bij een toevalsproces de kans op een bepaalde uitkomst of gebeurtenis te bepalen aan de hand van een kans(boom)diagram, van combinatoriek en van kansregels.
- 12 De kandidaat kan voor toevalsvariabelen met een beperkt aantal uitkomsten de kansverdeling opstellen en de verwachtingswaarde en de standaardafwijking berekenen.
- 13 De kandidaat kan aangeven of er in een bepaalde situatie sprake is van een binomiale kansverdeling, kan de parameters van deze kansverdeling aangeven en kan de daarbij behorende formules gebruiken voor het berekenen van kansen, verwachtingswaarde en standaardafwijking.
- 14 De kandidaat kan de parameters van de normale verdeling hanteren, dit zijn het gemiddelde (ofwel de verwachtingswaarde) en de standaardafwijking, en kan de vuistregels voor de ligging van 68% en 95% van de waarnemingen hanteren.

- 15 De kandidaat kan de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van twee onafhankelijke toevalsvariabelen bepalen en kan de verwachtingswaarde en de standaardafwijking bepalen van de som en het gemiddelde van de uitkomsten van  $n$  onafhankelijke herhalingen van hetzelfde toevalsexperiment.
- 16 De kandidaat kan vanuit een daartoe geschikte probleemsituatie een statistische toetsingsprocedure opzetten en daarbij
- aangeven of het een gemiddelde dan wel een proportietoets betreft
  - de nulhypothese formuleren
  - aangeven of de procedure linkszijdig, rechtszijdig dan wel tweezijdig moet worden uitgevoerd
  - aangeven hoe een gegeven steekproefuitkomst moet worden omgerekend naar een overschrijdingskans
  - de gegeven waarde van een overschrijdingskans interpreteren.

## Tentamenbenodigdheden

Naar het tentamen moet u meenemen:

- Identiteitsbewijs  
*Paspoort, rijbewijs, Europese ID kaart, verblijfsdocument*
- Schrijfgerei: pen  
*Een potlood mag alleen gebruikt worden voor het tekenen van grafieken.*
- Liniaal of geodriehoek
- Rekenmachine met exponentiële, logaritmische en goniometrische functies  
**Grafische rekenmachines** en rekenmachines met de mogelijkheid om integralen te berekenen zijn **niet toegestaan**.
- Een horloge (geen smartwatch) of een klok (niet de klok van uw telefoon)
- Eten en drinken

Zorg ervoor dat u de juiste rekenmachine meeneemt. Als u alleen een grafische rekenmachine bij u heeft, dan zult u het tentamen zonder rekenmachine moeten maken.

## Formulelijst

Onderstaande lijst wordt afgedrukt op de laatste twee bladzijden van het voortentamen Wiskunde A

### Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  met  $a \neq 0$  en  $b^2 - 4ac \geq 0$  zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Differentiëren

Naam van de regel	Functie	Afgeleide
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ofwel $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

### Logaritmen

Regel	Voorwaarden
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

### Rijen

<b>rekenkundige rij:</b>	$Som = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (u_e + u_l)$
<b>meetkundige rij:</b>	$Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
<i>In beide formules geldt:</i>	$e = \text{rangnummer eerste term}; \quad l = \text{rangnummer laatste term}$

## Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen  $X$  en  $Y$  geldt:  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen  $X$  en  $Y$  geldt:  $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet:

Bij een serie van  $n$  onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som  $S$  en voor het gemiddelde  $\bar{X}$  van de uitkomsten  $X$ :

$$E(S) = n \cdot E(X)$$

$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$$

$$E(\bar{X}) = E(X)$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

## Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele  $X$ , waarbij  $n$  het aantal experimenten is en  $p$  de kans op succes per keer, geldt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{met} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Verwachtingswaarde: } E(X) = np$$

$$\text{Standaardafwijking: } \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

$n$  en  $p$  zijn de parameters van de binomiale verdeling.

## Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele  $X$  die normaal verdeeld is met gemiddelde  $\mu$  en standaardafwijking  $\sigma$  geldt:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ is standaard normaal verdeeld en } P(X < g) = P\left(Z < \frac{g - \mu}{\sigma}\right)$$

$\mu$  en  $\sigma$  zijn de parameters van de normale verdeling.

## Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid  $T$  normaal verdeeld is met gemiddelde  $\mu_T$  en standaardafwijking  $\sigma_T$  zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

$\alpha$	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1,645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1,645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1,96\sigma_T$ $g_r = \mu_T + 1,96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2,33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2,33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2,58\sigma_T$ $g_r = \mu_T + 2,58\sigma_T$

## Uitwerking van het tentamenprogramma

Hieronder wordt het tentamenprogramma nader uitgewerkt in een lijst van begrippen, eigenschappen en vaardigheden. Deze lijst is bedoeld als ondersteuning bij de voorbereiding op het voortentamen, maar niet als vervanging van het tentamenprogramma. Hoewel deze lijst met de grootst mogelijke zorg is samengesteld, kan het daarom voorkomen dat een tentamenvraag die wel onder het tentamenprogramma valt, niet aan de orde komt in deze lijst.

Begrip / Eigenschap / Vaardigheid	Opmerking / Toelichting
<p><b>Diverse berekeningen</b></p> <p>Rekenen met procenten; procentuele verandering</p> <p>Wetenschappelijke notatie</p> <p>Rekenen met breuken</p> <p>Verhoudingen</p> <p>Rekenen met variabelen:</p> <p>Haakjes wegwerken</p> <p>Een variabele vrijmaken</p> <p>Rekenen met eenheden</p>	<p><math display="block">\frac{Nieuw - Oud}{Oud} \times 100\%</math></p> <p><math>0,0000123 = 1,23 \times 10^{-5}</math></p> <p>Optellen aftrekken, vermenigvuldigen Gelijknamig maken Vereenvoudigen Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde</p> <p>In een verhoudingentabel zijn de kruisproducten gelijk</p> <p><i>Bijvoorbeeld:</i></p> $(a + b)(c + d) - (e + f) = ac + ad + bc + bd - e - f$ $y = \frac{1}{x + 1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} - 1$ <p>De trein rijdt 12 km in 5 minuten. Dat is 2,4 km/minuut Ofwel 40 m/s Ofwel 144 km/u</p>

<p><b>Machten en wortels</b></p> <p><math>a^n</math> is een macht met grondtal <math>a</math> en exponent <math>n</math></p> <p><math>\sqrt[n]{a}</math> is het getal waarvan de <math>n</math>-de macht gelijk is aan <math>a</math></p>	<p><math>n</math> is een rationaal getal (een breuk)</p> <p><math>n = 2, 3, 4, 5, \dots</math></p> <p>Voor even <math>n</math> zijn <math>a \geq 0</math> en <math>\sqrt[n]{a} \geq 0</math></p>
<p><b>Bijzondere exponenten</b></p> <p><math>a^2 = a \cdot a</math>; <math>a^3 = a \cdot a \cdot a</math> etc.</p> <p><math>a^1 = a</math></p> <p><math>a^0 = 1</math></p> <p><math>a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n</math></p> <p><math>a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}</math></p>	<p><math>a \neq 0</math></p> <p><math>a \neq 0</math></p> <p><math>a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}</math></p> <p><math>n = 2, 3, 4, 5, \dots</math></p> <p>Voor even <math>n</math> zijn <math>a \geq 0</math> en <math>a^{\frac{1}{n}} \geq 0</math></p> <p><math>a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}</math></p>
<p><b>Rekenregels voor machten</b></p> <p><math>a^m \cdot a^n = a^{m+n}</math></p> <p><math>\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}</math></p> <p><math>(a^m)^n = a^{m \cdot n}</math></p> <p><math>(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n</math></p> <p><math>\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}</math></p>	<p><math>a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m</math></p> <p><math>(a + b)^2 \neq a^2 + b^2</math></p>

<p><b>Rechte lijnen en lineaire verbanden</b></p> <p>Algemene vergelijking: <math>mx + ny = c</math></p> <p><math>n = 0</math> geeft een verticale lijn</p> <p><math>m = 0</math> geeft een horizontale lijn</p> <p>Als de lijn niet verticaal is, dan kun je de vergelijking ook schrijven in de vorm <math>y = ax + b</math></p> <p>Richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten <math>A(x_A, y_A)</math> en <math>B(x_B, y_B)</math>:</p> $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ <p>Vergelijking opstellen met de richtingscoëfficiënt</p> <p>Snijpunten berekenen van twee rechte lijnen</p> <p>Interpoleren en extrapoleren</p> <p>Recht evenredig en omgekeerd evenredig</p>	<p>De lijn met vergelijking <math>3x + 4y = 12</math> gaat door de punten <math>(4,0)</math> en <math>(0,3)</math></p> <p><math>3x + 0 \cdot y = 12</math> geeft <math>x = 4</math></p> <p><math>0 \cdot x + 4y = 12</math> geeft <math>y = 3</math></p> <p><math>3x + 4y = 12</math> geeft <math>y = -\frac{3}{4}x + 3</math></p> <p>Dit is gelijk aan <math>a</math> in de formule <math>y = ax + b</math></p> <p>Substitueer de richtingscoëfficiënt en de coördinaten van een punt in de formule <math>y = ax + b</math></p> <p>Elimineer <math>y</math> uit het stelsel van twee vergelijkingen</p>
<p><b>Machtsverbanden</b></p> <p><math>y = ax^n</math> met <math>n</math> even</p> <p><math>y = ax^n</math> met <math>n</math> oneven</p> <p>Horizontale verschuiving</p> <p>Verticale verschuiving</p> <p>Herschaling in verticale richting</p>	<p>De grafiek heeft een top in <math>(0,0)</math></p> <p><math>(0,0)</math> is het punt van symmetrie van de grafiek</p> <p><math>y = (x - 4)^2 + 5</math> krijg je door <math>y</math>-coördinaten van de grafiek van <math>y = x^2</math> drie keer zo groot te maken en vervolgens de grafiek 4 naar rechts en 5 omhoog te verschuiven. De grafiek is dan een dalparabool met top <math>(4,5)</math>.</p>



<b>Groeiformules</b>	
<p><i>Exponentiële groei met beginwaarde <math>b</math> en groeifactor <math>g</math></i></p> <p>De grafiek van <math>N(t) = g^t</math> is stijgend voor <math>g &gt; 1</math> en dalend voor <math>0 &lt; g &lt; 1</math></p> <p>Groeifactor en groeipercentage</p> <p>Groeipercentage omzetten naar andere tijdseenheid</p> <p>Verdubbelingstijd bij <math>g &gt; 1</math></p> <p>Halveringstijd bij <math>0 &lt; g &lt; 1</math></p>	<p><math>N(t) = b \cdot g^t</math></p> <p>En "ontaard" voor <math>g = 1</math></p> <p>Via de groeifactor</p> <p>Ook terugrekenen naar de groeifactor over een bepaalde tijdseenheid</p>
<p><i>Andere groeiformules</i></p> <p><math>N(t) = a(1 - g^t)</math></p> <p><math>N(t) = \frac{a}{1 + c \cdot g^t}</math></p>	<p>Voor <math>0 &lt; g &lt; 1</math> stijgen de grafieken voor beide formules naar <math>a</math>, dat is de grenswaarde (het verzadigingsniveau)</p>

<b>Logaritmen</b>	
<p><math>y = {}^g\log(x)</math> betekent <math>g^y = x</math></p> <p><math>{}^g\log(1) = 0</math>; <math>{}^g\log(g) = 1</math>; <math>{}^g\log(g^n) = n</math></p> <p><math>\log(x) = {}^{10}\log(x)</math></p> <p>De grafiek is stijgend voor <math>g &gt; 1</math> en dalend voor <math>0 &lt; g &lt; 1</math></p>	<p><math>g &gt; 0</math>, <math>g \neq 1</math>; <math>x &gt; 0</math></p> <p><math>\log(1) = 0</math>; <math>\log(10) = 1</math>; <math>\log(100) = 2</math></p> <p>Als <math>x</math> naar 0 nadert, naderen de grafieken de <math>y</math>-as</p>
<b>Rekenregels voor logaritmen</b>	
<p><math>{}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)</math></p> <p><math>{}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)</math></p> <p><math>{}^g\log(a^n) = n \cdot {}^g\log(a)</math></p> <p><math>{}^g\log(a) = \frac{{}^p\log(a)}{{}^p\log(g)}</math></p>	<p>Deze volgen uit de rekenregels voor machten</p> <p>Dit geldt voor alle getallen <math>n</math></p> <p>Wordt vaak gebruikt met <math>p = 10</math> om logaritmen te berekenen met de <math>\log</math></p>

	functie van de rekenmachine
<p><b>Differentiëren: afgeleiden van de standaardfuncties</b></p> <p><math>f(x) = a</math> geeft <math>f'(x) = 0</math></p> <p><math>f(x) = ax</math> geeft <math>f'(x) = a</math></p> <p><math>f(x) = ax^n</math> geeft <math>f'(x) = n \cdot x^{a-1}</math></p> <p><math>f(x) = e^x</math> geeft <math>f'(x) = e^x</math></p> <p><math>f(x) = g^x</math> geeft <math>f'(x) = g^x \cdot \ln(g)</math></p> <p><math>f(x) = \ln(x)</math> geeft <math>f'(x) = \frac{1}{x}</math></p>	<p>De afgeleide wordt ook genoteerd als <math>\frac{dy}{dx}</math></p> <p>Uit de somregel volgt:</p> <p><math>f(x) = ax + b</math> geeft <math>f'(x) = a</math></p> <p>Ook als <math>n</math> een breuk of een negatief getal is.</p> <p><math>e \approx 2,71828</math></p> <p><math>\ln(g) = {}^e\log(g) \quad (g &gt; 0)</math></p> <p>Uit de constante factor-regel volgt:</p> <p><math>f(x) = g^x \log(x)</math> geeft <math>f'(x) = \frac{1}{x \ln(g)}</math></p>
<p><b>Regels voor het differentiëren van combinaties van functies</b></p> <p>Constante factorregel</p> <p>Somregel</p> <p>Productregel</p> <p>Quotiëntregel</p> <p>Kettingregel</p>	<p><math>g(x) = c \cdot f(x)</math> geeft <math>g'(x) = c \cdot f'(x)</math></p> <p><i>Zie verder de formulelijst</i></p>
<p><b>Toepassingen van de afgeleide</b></p> <p><math>f'(a)</math> is de helling van de (raaklijn aan de) grafiek van <math>f</math> in het punt <math>(a, f(a))</math></p> <p>De grafiek is stijgend als <math>f'(x) &gt; 0</math> en dalend als <math>f'(x) &lt; 0</math></p> <p>In een minimum en in een maximum geldt <math>f'(x) = 0</math></p> <p>Minima en maxima worden samen extremen genoemd.</p> <p>De punten waar de grafiek een minimum of een maximum heeft, heten de toppen van de grafiek.</p> <p>Minimale en de maximale groeisnelheid</p>	<p><math>f'(a) =</math> richtingscoëfficiënt raaklijn in punt <math>(a, f(a))</math></p> <p>Je berekent de punten waar <math>f</math> een minimum of een maximum kan hebben met <math>f'(x) = 0</math>. Daarna moet je in principe nog nagaan in welke punten de grafiek een minimum dan wel een maximum heeft. <i>Dit blijkt vaak al uit de vraagstelling.</i></p> <p>De afgeleide functie (de groeisnelheid) kan ook gedifferentieerd worden</p>

<b>Rijen</b>	
Directe formule	Berekent een term op basis van het nummer
Rekursieve formule	Berekent een term op basis van de vorige term
Rekenkundige rij	Rekursieve formule: $u_{n+1} = u_n + a$ Directe formule: $u_n = u_0 + a \cdot n$ Ofwel: $u = u_1 + a \cdot (n - 1)$
Meetkundige rij	Rekursieve formule: $u_{n+1} = r \cdot u_n$ Directe formule: $u_n = r^n \cdot u_0$ Ofwel: $u_n = r^{n-1} \cdot u_1$
Somformule rekenkundige rij Somformule meetkundige rij	Zie formulelijst
Nummer van een term berekenen	Dit doe je door de directe formule gelijk te stellen aan de term

<b>Sinusfuncties</b>	
Algemene formule: $f(x) = A + B \cdot \sin(C \cdot (x - D))$	$A =$ evenwichtsstand $ B  =$ amplitude $C = \frac{2\pi}{\text{periode}}$
De grafiek is een sinusöide	
Evenwichtsstand, amplitude, periode en beginpunt aflezen in grafiek	
Evenwichtsstand, amplitude, periode en beginpunt bepalen met de formule	Als $B > 0$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand in het punt $(D, A)$ (beginpunt)
Periode en symmetrie rond maximum en minimum gebruiken	

## Beschrijvende statistiek

*Dit onderwerp komt in het voortentamen wiskunde A zeer beperkt aan de orde*

Modus, mediaan, gemiddelde en standaardafwijking voor een serie losse waarnemingsgetallen

Gemiddelde en standaardafwijking bij een frequentieverdeling

Gemiddelde en standaardafwijking mogen met de statistiekfunctie van een gewone rekenmachine worden bepaald

## Systematisch tellen

*Ook bekend als "telproblemen", maar voor wie deze leerstof beheerst zou tellen geen probleem moeten zijn.*

Visualiseren

Boomdiagram, wegendiagram, rooster, kruistabel, venndiagram

Vermenigvuldigingsregel

I EN II

Somregel

I OF II (maar niet tegelijk)

Met of zonder herhaling tellen

Permutaties, faculteiten

Volgorde is van belang

Combinaties

Volgorde maakt niet uit

Driehoek van Pascal

Het aantal rijtjes met 5 letters A en 3 letters B staat op de 8<sup>ste</sup> rij van de driehoek van Pascal en is gelijk aan

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

Teltechnieken combineren

Het aantal rijtjes met 3 letters A, 4 letters B en 5 letters C wordt gegeven door  $\binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4}$  (en door  $\binom{12}{5} \cdot \binom{7}{4}$ )

## Kansrekening

Een gebeurtenis is een bepaald deel van alle mogelijke uitkomsten van een toevalsexperiment

Kansdefinitie van Laplace voor kansexperimenten met uitkomsten die alle even waarschijnlijk zijn

Empirische kansen worden bepaald met relatieve frequenties

Voorwaardelijke kansen

Onafhankelijke gebeurtenissen

Productregel voor onafhankelijke kansexperimenten

Somregel voor elkaar uitsluitende gebeurtenissen

De complementregel

Toepassen van deze regels bij samengestelde kansexperimenten

Wordt vaak aangegeven met een hoofdletter, zoals  $G$ ,  $A$  en  $B$ .

$$P(G) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$$

Theoretische kansen worden vaak berekend met systematisch tellen

Worden vaak berekend met behulp van een kruistabel

$$P(A \text{ onder de voorwaarde } B) = P(A)$$

$$P(G_1 \text{ en } G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2)$$

$$P(G_1 \text{ of } G_2) = P(G_1) + P(G_2)$$

## Toevalsvariabelen

Als de uitkomsten van een toevalsexperiment getallen zijn, kun je de bijbehorende kansen noteren met behulp van een toevalsvariabele

De kansverdeling is een opsomming van alle mogelijke uitkomsten van een toevalsvariabele met de bijbehorende kansen

Verwachtingswaarde;  
verwachtingswaarde van de som = som van de verwachtingswaarden

Standaardafwijking

Standaardafwijking van de som en van het gemiddelde van onafhankelijke toevalsvariabelen;  $\sqrt{n}$ -wet

Als  $X$  het aantal ogen bij een worp met een dobbelsteen is, dan noteren we de kans op 4 ogen met  $P(X = 4)$

De kansverdeling wordt vaak genoteerd in een tabel, bijvoorbeeld

$x$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Mag berekend worden met de statistiek functie van een rekenmachine

Zie formulelijst

<p><b>De binomiale kansverdeling</b></p> <p>Bernoulliexperiment</p> <p>Binomiaal kansexperiment</p> <p>Enkelvoudige kans (kans op <math>k</math> keer succes)</p> <p>Cumulatieve kansen</p> <p>Verwachtingswaarde</p> <p>Standaardafwijking</p>	<p>Uitkomst: "succes" of "mislukking"</p> <p>Parameters:  <math>n</math> = aantal bernouliexperimenten  <math>p</math> = kans op succes per experiment</p> $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ <p><math>P(X \leq k)</math>; <math>P(X \geq k)</math>; <math>P(k \leq X \leq l)</math>  Alleen voor de som van hooguit 3 enkelvoudige kansen.</p> $E(X) = np$ $\sigma_X = \sqrt{np(1 - p)}$
<p><b>De normale verdeling</b></p> <p>De normale verdeling en de Gausskromme als benadering van een frequentieverdeling</p> <p>Vuistregels</p> <p>Berekenen van <math>\mu</math> en/of <math>\sigma</math> met behulp van de vuistregels</p>	<p>Parameters:  <math>\mu</math> of <math>\mu_X</math> = gemiddelde (verwachtingswaarde)  <math>\sigma</math> of <math>\sigma_X</math> = standaardafwijking</p> <p>50% van de waarnemingen ligt onder het gemiddelde</p> <p>68% van de waarnemingen ligt tussen de grenzen <math>\mu - \sigma</math> en <math>\mu + \sigma</math>;  95% van de waarnemingen ligt tussen de grenzen <math>\mu - 2\sigma</math> en <math>\mu + 2\sigma</math></p> <p>Bijvoorbeeld als gegeven is dat 84% van een populatie meer weegt dan 80 kg en dat 2,5% van die populatie meer weegt dan 110 kg.</p>
<p><b>Normale benadering</b></p> <p>Een discreet verdeelde toevalsvariabele kan vaak benaderd worden met een normale verdeling</p> <p>Het gemiddelde en de standaardafwijking van de normale benadering zijn de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de discreet verdeelde toevalsvariabele</p> <p>Continuïteitscorrectie</p>	<p>Voor een binomiaal verdeelde toevalsvariabele is dit als <math>np \geq 5</math></p> <p>Voor de normale benadering <math>Y</math> van een binomiaal verdeelde toevalsvariabele met parameters <math>n</math> en <math>p</math> geldt dus  <math>\mu_Y = np</math> en <math>\sigma_Y = \sqrt{np(1 - p)}</math></p> $P(X \leq k) = P\left(X < k + \frac{1}{2}\right)$

<p><b>Toetsen van hypothesen</b></p> <p>Uit een omschrijving het soort toetsingsprocedure en de bijbehorende nulhypothese afleiden</p> <p>De alternatieve hypothese afleiden</p> <p>De toetsingsgrootte bepalen met de bijbehorende parameters</p> <p>Significantieniveau</p> <p>Beslissen op grond van een overschrijdingskans</p> <p>Beslissen door de steekproefuitkomst te vergelijken met een grenswaarde</p>	<p>Proportietoets (binomiaaltoets) met nulhypothese <math>H_0: p = p_0</math> of gemiddeldentoets (normale toets) met nulhypothese <math>H_0: \mu = \mu_0</math></p> <p>Linkszijdig, rechtszijdig of tweezijdig</p> <p>Bij een binomiaaltoets zijn dat <math>n</math> en <math>p_0</math>, bij een normale toets zijn dat <math>\mu_0</math> en <math>\sigma</math>, <math>\sigma</math> bepaal je met de <math>\sqrt{n}</math>-wet</p> <p>Meestal <math>\alpha = 0,05</math>, soms <math>\alpha = 0,01</math></p> <p>Aangezien het gebruik van grafische rekenmachines en tabellen verboden is, zal de overschrijdingskans op het voortentamen wiskunde A meestal gegeven worden</p> <p>De grenswaarden voor een normale toets kun je berekenen met de formules uit de formulelijst. Als <math>np_0 \geq 5</math> kun je deze formules ook gebruiken bij een binomiaaltoets. Daarbij hoeft geen rekening gehouden te worden met de continuïteitscorrectie</p>
--	--

## Algebraïsche vaardigheden

Hieronder een overzicht van algebraïsche vaardigheden die de kandidaten voor het tentamen wiskunde A van de CCVW moeten beheersen. Ook voor deze lijst geldt dat hij met de uiterste zorgvuldigheid is samengesteld, maar dat het voor kan komen dat een vaardigheid die wel onder het tentamenprogramma valt, niet aan de orde komt in deze lijst.

Vaardigheid	Opmerking / Toelichting
<p><b>Standaardvergelijkingen oplossen</b></p> <p>Eerstegraads</p> <p>Tweedegraads <i>Met abc-formule</i></p> <p>Machtsvergelijkingen met een positieve even exponent</p> <p>Machtsvergelijkingen met positieve oneven exponenten</p> <p>Andere machtsvergelijkingen</p> <p>Wortelvergelijkingen</p> <p>Exponentiële en logaritmische vergelijkingen die zich daartoe lenen exact oplossen</p> <p>Exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen</p>	$ax + b = px + q$ $ax^2 + bx + c = 0$ <p><i>Mag indien mogelijk ook met ontbinden in factoren</i></p> $x^n = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{a} \quad (a \geq 0)$ $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ $x^n = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}} \quad (a \geq 0)$ $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 \quad (x \geq 0; a \geq 0)$ ${}^g\log(g^n) = a \Leftrightarrow g^n = g^a \Leftrightarrow n = a$ $g^x = a \Leftrightarrow x = {}^g\log(a)$
<b>Ongelijkheden oplossen</b>	Bij het grafisch oplossen van ongelijkheden moeten de snijpunten van de grafieken algebraïsch worden berekend
<b>Stelsels van vergelijkingen oplossen</b>	Met eliminatie en/of substitutie
<b>Opstellen van de vergelijking van een rechte lijn</b>	Richtingscoëfficiënt bepalen en samen met de coördinaten van een punt invullen in één van de standaardformules



<p><b>Vergelijkingen en formules bewerken</b></p> <p>Een vergelijking splitsen</p> <p>Een factor buiten haakjes halen</p> <p>Haakjes wegwerken</p> <p>Bewerkingen met breuken</p> <p>Bewerkingen met wortels</p> <p>Toepassen van rekenregels</p>	<p><i>Bijvoorbeeld om vergelijkingen om te werken tot standaardvergelijkingen</i></p> $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$ $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$ $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0 \vee B = C$ $A \cdot B + A \cdot C = A(B + C)$ $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$ <p>Optellen (gelijknamig maken)</p> <p>Vermenigvuldigen en delen</p> <p>Kruiselings vermenigvuldigen:</p> $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC \wedge BD \neq 0$ $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow A = B^2 \wedge A \geq 0$ <p>Zoals voor exponenten en logaritmen</p>
<p><b>Formules combineren</b></p>	<p>Als bijvoorbeeld de prijs per stuk <math>p</math> en de kosten <math>k</math> beide afhangen van het aantal stuks <math>q</math>, dan kun je ook formules maken voor de opbrengst: <math>r = pq</math> en voor de winst: <math>w = r - k = pq - k</math></p> <p>Let op het juiste gebruik van haakjes bij het invullen van de formules voor <math>p</math> en <math>k</math></p>
<p><b>Formules met logaritmen bewerken</b></p> <p>Veranderen van grondtal</p> <p>Een variabele vrijmaken uit een exponentiële of logaritmische formule</p> <p><math>{}^g\log(N) = at + b</math> omzetten naar een formule van de vorm <math>N = B \cdot G^t</math> en andersom</p> <p><math>{}^g\log(N) = a + b \cdot {}^g\log(t)</math> omzetten naar een formule van de vorm <math>N = A \cdot t^b</math> en andersom</p>	<p>Met de vierde rekenregel</p> <p>Gebruik <math>Y = {}^g\log(X) \Leftrightarrow g^Y = X</math></p> $B = g^b; G = g^a$ $A = g^a$

## Aanbevolen leermateriaal

Voor de onderbouwleerstof en de algebraïsche vaardigheden die deel uitmaken van het tentamenprogramma wiskunde A wordt aanbevolen:

*Wiswijs* (Pach en Wisbrun, vierde druk 2018, ISBN 9789001876265)  
voor zelfstudie zijn oudere drukken uiteraard ook bruikbaar.

De leerstof van de bovenbouw van het vwo (leerjaren 4, 5 en 6) is terug te vinden in:  
Getal en Ruimte vwo A **elfde** editie (eerste uitgave 2014, examenprogramma 2015)  
Deel 1AC, 2AC, 3A en 4A

De leerstof voor het voortentamen wiskunde A vindt u in

- Deel 1AC, hoofdstuk 1 t/m 4
- Deel 2AC, hoofdstuk 5 (gedeeltelijk, zie het tentamenprogramma)
- Deel 2AC, hoofdstuk 6 en 7
- Deel 3A, hoofdstuk 8 (met uitzondering van toenamedigrammen)
- Deel 3A, hoofdstuk 9 (gedeeltelijk, zie het tentamenprogramma)
- Deel 3A, hoofdstuk 10
- Deel 3A, hoofdstuk 11 (met aanpassingen, zie het tentamenprogramma)
- Deel 4A, hoofdstuk 12, 13 en 14

*Bij de examentraining (deel 4A, hoofdstuk 15) dient u er rekening mee te houden dat de grafische rekenmachine niet toegestaan is bij het voortentamen wiskunde van de CCVW. Er zullen dan ook geen vragen gesteld worden die niet zonder grafische rekenmachine beantwoord kunnen worden. Verder bevat die hoofdstuk geen opgaven over de onderwerpen Statistiek en Kansrekening.*

ISBN en overige informatie op [www.getalenruimte.noordhoff.nl](http://www.getalenruimte.noordhoff.nl)