

Tentamen Wiskunde B

Datum: 23 januari 2012
Tijd: 19.00 - 22.00 uur
Aantal opgaven: 5

Zet uw naam op alle in te leveren blaadjes.

Laat bij elke opgave door middel van een berekening of toelichting op gebruik van de grafische rekenmachine zien hoe het antwoord verkregen is.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen tipp-ex o.i.d.. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een (grafische) rekenmachine van een type dat goedgekeurd is voor het Centraal Examen Wiskunde van het vwo. Overige hulpmiddelen, zoals formulekaart, BINAS en tabellenboek zijn NIET toegestaan. Op bladzijde 3 is een lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden.

Op www.ccvx.nl vindt u vanaf eind deze maand:

- de uitwerkingen van dit tentamen;
- de stand van zaken van de correctie van het tentamen.

U wordt dringend verzocht om de Open Universiteit niet te bellen of te mailen over uw uitslag. Deze wordt zo spoedig mogelijk naar u opgestuurd.

Te behalen punten per onderdeel:					
Opgave	1	2	3	4	5
a	6	6	8	5	8
b	6	5	6	5	3
c	8	5	6		7
d		6			
Totaal	20	22	20	10	18
Cijfer =	$\frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$				

1 In de figuur hiernaast ziet u de grafieken van de functies

$$f(x) = x^3 - 4x^2 \quad \text{en} \quad g(x) = 2x^2.$$

6 pt

a Bereken algebraïsch de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g .

Het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van g en de horizontale lijn $y = 4$ wordt gewenteld rond de y -as.

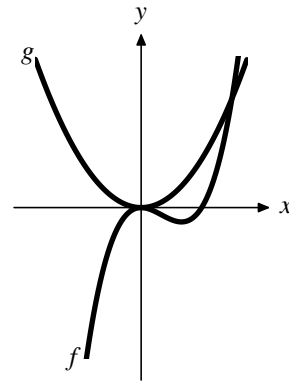
6 pt

b Bereken algebraïsch de inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat.

Er zijn twee rechte lijnen door de oorsprong die raken aan de grafiek van f .

8 pt

c Geef de vergelijking van elk van deze twee raaklijnen.



2 Voor ieder reëel getal p met uitzondering van $p = 0$ wordt de functie f_p gegeven door

$$f_p(x) = \ln(px)$$

Verder wordt gegeven de functie $g(x) = \ln(x^2 + 9)$.

6 pt

a Bereken exact voor welke waarde(n) van p de vergelijking $f_p(x) = g(x)$ twee oplossingen heeft.

Neem in de volgende vragen $p = e$

5 pt

b Toon aan dat $F(x) = x \ln x$ een primitieve is van f_e .

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_e , de x -as en de lijn $x = 1$.

5 pt

c Bereken de oppervlakte van V exact.

De grafiek van g heeft twee buigpunten.

6 pt

d Bereken de coördinaten van deze twee buigpunten exact.

3 Gegeven de functies $f(x) = \cos(4x)$ en $g(x) = \sin(2x)$.

8 pt

a Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op en bepaal de coördinaten van alle snijpunten van de grafieken van f en g waarvan de x -coördinaat in het interval $[0, \pi]$ ligt.

6 pt

b Laat zien dat f ook geschreven kan worden als $f(x) = 1 - 8 \sin^2(x) + 8 \sin^4(x)$.

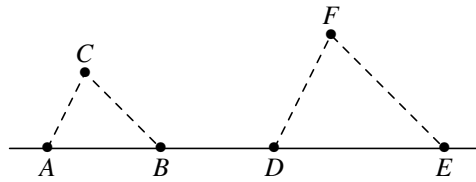
De functie h wordt gegeven door $h(x) = 2 \sin^2(x) - \sin^4(x)$.

A is het punt op de grafiek van h waarvoor geldt $x_A = \frac{1}{4}\pi$.

6 pt

c Stel algebraïsch een vergelijking op voor de raaklijn aan de grafiek van h in punt A .

- 4 De punten A , B , D en E liggen op een rechte lijn.
De punten C en F liggen beide boven deze rechte lijn en wel zo dat de driehoeken ABC en DEF gelijkvormig zijn. In de figuur hieronder ziet u punten A , B , C , D , E en F die aan deze beschrijving voldoen.

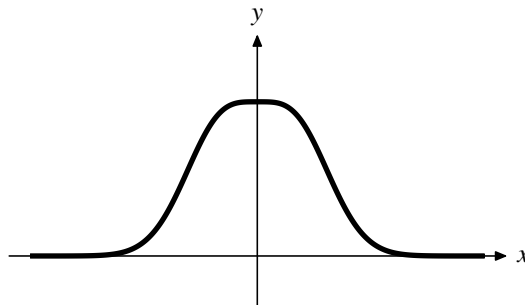


- 5 pt **a** Gegeven zes punten A , B , C , D , E en F die aan bovenstaande beschrijving voldoen. Gegeven verder dat (anders dan in de figuur) CF evenwijdig loopt met de rechte lijn door A , B , D en E .
Toon aan dat dan geldt $|AB| = |DE|$.
- 5 pt **b** Gegeven zes punten A , B , C , D , E en F die aan bovenstaande beschrijving voldoen. Gegeven verder dat (anders dan in de figuur) $|AB|$ en $|DE|$ even groot zijn.
Toon aan dat CF dan evenwijdig loopt met de rechte lijn door A , B , D en E .

- 5 Hiernaast ziet u de grafiek van de functie

$$f(x) = (1 + x^2) \cdot e^{1-x^2}$$

De raaklijnen aan de grafiek van f in de punten $(-1,2)$ en $(1,2)$ en de x -as sluiten een driehoek in.



- 8 pt **a** Bereken algebraïsch de oppervlakte van deze driehoek.

Voor ieder positief getal p wordt een vierhoek $PQRS$ gegeven met hoekpunten $P(p,0)$, $Q(p,f(p))$, $R(-p,f(-p))$ en $S(-p,0)$. De oppervlakte A van deze vierhoek is een functie van p .

- 3 pt **b** Toon aan dat deze functie gegeven wordt door $A(p) = (2p + 2p^3) \cdot e^{1-p^2}$.
- 7 pt **c** Bereken algebraïsch voor welke waarde van p de oppervlakte van de vierhoek $PQRS$ maximaal is.

Lijst van formules en verwijzingen naar definities/stellingen voor het voortentamen Wiskunde B

Vlakke meetkunde

Verwijzingen naar definities en stellingen die bij een bewijs mogen worden gebruikt zonder nadere toelichting.

Hoeken, lijnen en afstanden:

gestrekte hoek, rechte hoek, overstaande hoeken, F-hoeken, Z-hoeken, afstand punt tot lijn, driehoeksongelijkheid.

Meetkundige plaatsen:

middelloodlijn, bissectrice, bissectricepaar, middenparallel, cirkel, parabool.

Driehoeken:

hoekensom driehoek, buitenhoek driehoek, congruentie: HZH, ZHH, ZHZ, ZZZ, ZZR; gelijkvormigheid: hh, zhz, zzz, zZR; middelloodlijnen driehoek, bissectrices driehoek, hoogtelijn driehoek, hoogtelijnen driehoek, zwaartelijn driehoek, zwaartelijnen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, rechthoekige driehoek, Pythagoras, gelijkbenige rechthoekige driehoek, halve gelijkzijdige driehoek.

Vierhoeken:

hoekensom vierhoek, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant.

Cirkel, koorden, bogen, hoeken, raaklijn, vierhoeken:

koorde, boog en koorde, loodlijn op koorde, middellijn, Thales, middelpuntshoek, omtrekshoek, constante hoek, raaklijn, hoek tussen koorde en raaklijn, koordenvierhoek.

Goniometrie

$$\begin{array}{ll} \sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u & \sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t + u}{2} \cos \frac{t - u}{2} \\ \sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u & \sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t - u}{2} \cos \frac{t + u}{2} \\ \cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u & \cos t + \cos u = 2 \cos \frac{t + u}{2} \cos \frac{t - u}{2} \\ \cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u & \cos t - \cos u = -2 \sin \frac{t + u}{2} \sin \frac{t - u}{2} \end{array}$$

Opgave 1a

$$\star f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 6) = 0$$

Dit geeft $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

$$\star \text{ Te berekenen: } \int_0^6 g(x) - f(x) dx = \int_0^6 6x^2 - x^3 dx$$

$$\star \dots = \left[2x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^6$$

$$\star \dots = 2 \cdot 216 - \frac{1}{4} \cdot 1296 - (0 - 0) = 432 - 324 = 108$$

Opgave 1b

$$\star y = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$$

$$\star \text{ Te berekenen } \pi \cdot \int_0^4 x^2 dy$$

$$\star \dots = \pi \cdot \int_0^4 \frac{1}{2}y dy = \pi \cdot \left[\frac{1}{4}y^2 \right]_0^4 = \pi \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - 0 \right) = 4\pi$$

Opgave 1c

\star Een rechte lijn door de oorsprong heeft een vergelijking van de vorm $y = ax$.

Als dit een raaklijn is, dan geldt $f(x) = y = ax$ en $f'(x) = a$

$$\star \text{ Uit } f'(x) = a \text{ volgt } a = 3x^2 - 8x$$

$$\star \text{ Uit } f(x) = ax \text{ volgt dan } x^3 - 4x^2 = (3x^2 - 8x) \cdot x$$

$$\text{Dit geeft } x^3 - 4x^2 = 3x^3 - 8x^2 \Leftrightarrow -2x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 2) = 0$$

Hieruit volgt $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$\star x = 0$ geeft $a = 0$. De vergelijking van de raaklijn is dan $y = 0$

De x-as is de raaklijn aan de grafiek van f in de oorsprong.

$\star x = 2$ geeft $a = 3 \cdot 4 - 8 \cdot 2 = -4$. De vergelijking van de raaklijn is dan $y = -4x$.

Dit is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (2, -8).

Opgave 2a

$$\star f_p(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(px) = \ln(x^2 + 9) \Leftrightarrow px = x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 - px + 9 = 0$$

\star Deze vergelijking heeft twee oplossingen als $D = b^2 - 4ac > 0$

$$\star a = 1, b = -p, c = 9 \text{ geeft } D = p^2 - 36$$

$$\star D > 0 \Leftrightarrow p^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow p^2 > 36 \Leftrightarrow p > 6 \vee p < -6$$

Als $p > 6$ zijn er twee positieve oplossingen; als $p < -6$ dan is er twee negatieve oplossingen – als $p < -6$ en $x < 0$ dan is $px > 0$, dus bestaat $\ln(px)$.

Opgave 2b

$$\star F'(x) = [x]' \cdot \ln x + x \cdot [\ln x]'$$

$$\star \dots = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = \ln x + \ln e = \ln(x \cdot e) = f_e(x)$$

Alternatief:

$$\star \text{ Een primitieve van } \ln x \text{ is } x \ln x - x$$

$$\star \text{ Een primitieve van } \ln ex \text{ is dus } \frac{1}{e} \cdot (ex \ln ex - ex) = x \ln ex - x$$

$$\star \ln ex = \ln e + \ln x = 1 + \ln x$$

$$\star \text{ Dit geeft } x \ln ex - x = x(1 + \ln x) - x = x + x \ln x - x = x \ln x = F(x)$$

Opgave 2c

$$\star f_e(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(ex) = 0 \Leftrightarrow ex = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$\star \text{ Te berekenen: } \int_{1/e}^1 f_e \, dx$$

$$\star \dots = [F(x)]_{1/e}^1$$

$$\star \dots = F(1) - F(1/e) = 1 \cdot \ln 1 - \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 1 \cdot 0 - \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-1}$$

$$\star \dots = 0 - \frac{1}{e} \cdot -1 = \frac{1}{e}$$

Opgave 2d

$$\star g(x) = h(u(x)) \text{ met } h(u) = \ln u \text{ en } u(x) = x^2 + 9 \text{ dus } h'(u) = \frac{1}{u} \text{ en } u'(x) = 2x$$

$$\star \text{ Dit geeft } g'(x) = h'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{x^2 + 9} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 9}$$

$$\star g''(x) = \frac{2 \cdot (x^2 + 9) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2}$$

$$\star \dots = \frac{2x^2 + 18 - 4x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{18 - 2x^2}{(x^2 + 9)^2}$$

$$\star g''(x) = 0 \Leftrightarrow 18 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\star g(3) = g(-3) = \ln(9 + 9) = \ln 18,$$

dus buigpunten $(3, \ln 18)$ en $(-3, \ln 18)$

Opgave 3a

- ★ $\cos(4x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(4x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - 2x)$
- ★ Hieruit volgt $4x = \frac{1}{2}\pi - 2x + k \cdot 2\pi$ of $4x = 2x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- ★ $4x = \frac{1}{2}\pi - 2x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 6x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
 $4x = 2x - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
- ★ Oplossingen op het interval $[0, \pi]$:
 $x = \frac{1}{12}\pi + 0 \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{12}\pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + 1 \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{12}\pi + \frac{4}{12}\pi = \frac{5}{12}\pi$
 $x = \frac{1}{12}\pi + 2 \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{12}\pi + \frac{8}{12}\pi = \frac{3}{4}\pi$
 $x = -\frac{1}{4}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi$

Hieruit volgt dat de tweede reeks oplossingen deel uitmaakt van de eerste reeks.

- ★ $f(\frac{1}{12}\pi) = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}$ of $g(\frac{1}{12}\pi) = \sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$
 $f(\frac{5}{12}\pi) = \cos(\frac{5}{3}\pi) = \frac{1}{2}$ of $g(\frac{5}{12}\pi) = \sin(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$
 $f(\frac{3}{4}\pi) = \cos(3\pi) = -1$ of $g(\frac{3}{4}\pi) = \sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$
- De snijpunten op het interval $[0, \pi]$ zijn dus $(\frac{1}{12}\pi, \frac{1}{2})$, $(\frac{5}{12}\pi, \frac{1}{2})$ en $(\frac{3}{4}\pi, -1)$.

Alternatief:

- ★ $\cos(4x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \sin(\frac{1}{2}\pi - 4x) = \sin(2x)$
- ★ Hieruit volgt $\frac{1}{2}\pi - 4x = 2x + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}\pi - 4x = \pi - 2x + k \cdot 2\pi$
- ★ $\frac{1}{2}\pi - 4x = 2x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -6x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$
 $\frac{1}{2}\pi - 4x = \pi - 2x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$
- ★ Oplossingen en snijpunten als hierboven.

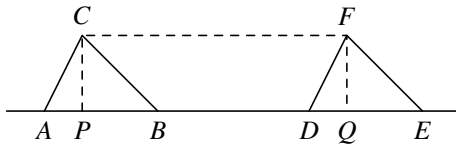
Opgave 3b

- ★ Uit $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ volgt $\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$
- ★ Uit $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ volgt dan
 $\cos(4x) = 1 - 2 \cdot (2\sin(x)\cos(x))^2 = 1 - 8\sin^2(x)\cos^2(x)$
- ★ Uit $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ volgt dan
 $\cos(4x) = 1 - 8\sin^2(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) = 1 - 8\sin^2(x) + 8\sin^4(x)$

Opgave 3c

- ★ $h(\frac{1}{4}\pi) = 2\sin^2(\frac{1}{4}\pi) - \sin^4(\frac{1}{4}\pi) = 2(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- ★ $h'(x) = 2 \cdot 2\sin(x) \cdot [\sin(x)]' - 4\sin^3(x) \cdot [\sin(x)]' = 4\sin(x)\cos(x) - 4\sin^3(x)\cos(x)$
- ★ $h'(\frac{1}{4}\pi) = 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 - 4 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})^4 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} = 2 - 1 = 1$
- ★ We zoeken dus de vergelijking van de rechte lijn $y = ax + b$ met $a = 1$ die door het punt A gaat met $x_A = \frac{1}{4}\pi$ en $y_A = \frac{3}{4}$.
Dit geeft $\frac{3}{4} = 1 \cdot \frac{1}{4}\pi + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\pi$.
De vergelijking is dus $y = x + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\pi$

Opgave 4a



- ★ P is het snijpunt van AB en de loodlijn op AB uit C .
 Q is het snijpunt van DE en de loodlijn op DE uit F .
 $PQ (= AB = DE)$ en CF lopen evenwijdig, dus zijn deze loodlijnen even lang:
 $|CP| = |FQ|$
CI: Is intuïtief duidelijk, mag maar hoeft niet te worden toegelicht:
Dit kunnen we als volgt afleiden uit de lijst van stellingen en definities:
Omdat PQ en CF evenwijdig lopen en CP en FQ loodrecht staan op PQ , staan CP en FQ ook loodrecht op CF (F -hoeken en/of Z -hoeken).
 $CFQP$ is dus een rechthoek en dus ook een parallellogram.
Omdat de overstaande zijden van een parallellogram even lang zijn,
volgt nu $|CP| = |FQ|$.
- ★ Hieruit volgt dat de driehoeken APC en DQF congruent zijn volgens congruentiegeval ZHH :
 $Z: |CP| = |FQ|$ (uit bovenstaande)
 $H: \angle APC = \angle DQF = 90^\circ$ (zo geconstrueerd)
 $H: \angle PAC = \angle QDF$
(overeenkomstige hoeken in de gelijkvormige driehoeken ABC en DEF)
- ★ Nu volgt dat de driehoeken ABC en DEF congruent zijn volgens congruentiegeval ZHH :
 HH : Overeenkomstige hoeken gelijk vanwege gelijkvormigheid
 $Z: |AC| = |EF|$ (overeenkomstige zijden in de congruente driehoeken APC en DQF)
- ★ Dit geeft dat de overeenkomstige zijden AB en DE even lang zijn.

Opgave 4b

- ★ De driehoeken ABC en DEF zijn congruent volgens congruentiegeval ZHH :
 $Z: |AB| = |DE|$ (gegeven)
 HH : Overeenkomstige hoeken gelijk vanwege de gelijkvormigheid.
- ★ Hieruit volgt $|AC| = |EF|$
- ★ Omdat ABC en DEF gelijkvormig zijn, volgt ook $\angle BAC = \angle EDF$.
Dit geeft dat AC en DF evenwijdig lopen (F -hoeken)
- ★ $ACFD$ is dus een parallellogram (overstaande zijden AC en DF zijn evenwijdig en even lang)
- ★ Hieruit volgt dat CF evenwijdig loopt met de lijn door A en D .

Opgave 5a

- ★ $f'(x) = [1 + x^2]' \cdot e^{1-x^2} + (1 + x^2) \cdot [e^{1-x^2}]'$
- ★ $\dots = 2x \cdot e^{1-x^2} + (1 + x^2) \cdot e^{1-x^2} \cdot -2x = -2x^3 \cdot e^{1-x^2}$
- ★ $f'(1) = -2 \cdot 1^3 \cdot e^{1-1^2} = -2 \cdot 1 \cdot e^0 = -2$
De raaklijn in (1,2) is dus $y = -2x + 4$
 $f'(-1) = -2 \cdot (-1)^3 \cdot e^{1-(-1)^2} = -2 \cdot -1 \cdot e^0 = 2$
De raaklijn in (-1,2) is dus $y = 2x + 4$
- ★ $-2x + 4 = 2x + 4 \Leftrightarrow -4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
De raaklijnen snijden elkaar dus in het punt (0,4).
 $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$
 $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$
De raaklijnen snijden de x -as dus in de punten (2,0) resp. (-2,0).
- ★ De driehoek met hoekpunten (2,0), (0,4) en (-2,0) heeft basis 4 en hoogte 4
dus de oppervlakte van deze driehoek is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

De oppervlakte kan ook berekend worden door de oppervlakte te berekenen van de driehoek die wordt ingesloten door één van de raaklijnen en de assen te berekenen en deze te verdubbelen.

Opgave 5b

- ★ $f(p) = (1 + p^2) \cdot e^{1-p^2};$
 $f(-p) = (1 + (-p)^2) \cdot e^{1-(-p)^2} = (1 + p^2) \cdot e^{1-p^2} = f(p)$
- ★ $PQRS$ is dus een rechthoek met hoogte $(1 + p^2) \cdot e^{1-p^2}$ en breedte $2p$.
- ★ Dit geeft $A(p) = 2p \cdot (1 + p^2) \cdot e^{1-p^2} = (2p + 2p^3) \cdot e^{1-p^2}$.

Opgave 5c

- ★ $A'(p) = [2p + 2p^3]' \cdot e^{1-p^2} + (2p + 2p^3) \cdot [e^{1-p^2}]'$
 $= (2 + 6p^2) \cdot e^{1-p^2} + (2p + 2p^3) \cdot e^{1-p^2} \cdot -2p = (2 + 2p^2 - 4p^4) \cdot e^{1-p^2}$
- ★ $A'(p) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2p^2 - 4p^4 = 0 \Leftrightarrow 1 + p^2 - 2p^4 = 0$
- ★ Met de substitutie $q = p^2$ volgt dan $1 + q - 2q^2 = 0$
- ★ Dit geeft $q = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4}$ dus $q = \frac{-1-3}{-4} = 1$ of $q = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$
- ★ De vergelijking $p^2 = -\frac{1}{2}$ heeft geen oplossingen.
De vergelijking $p^2 = 1$ heeft één positieve oplossing, namelijk $p = 1$.
De oppervlakte van $PQRS$ is dus maximaal voor $p = 1$.